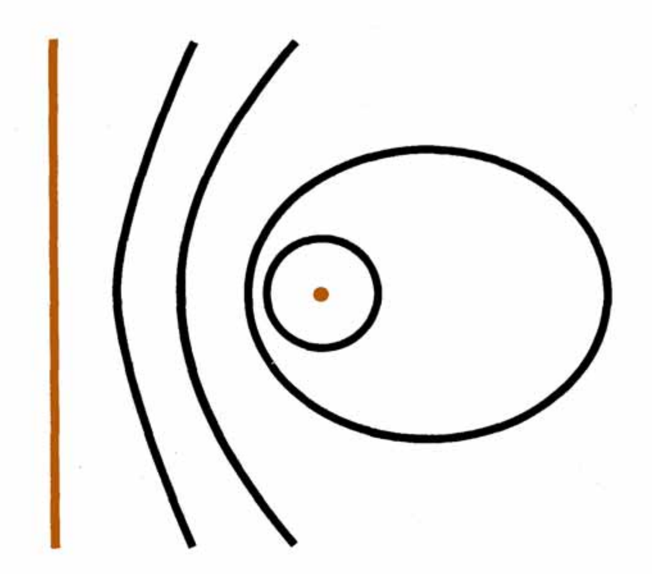
Capítulo 4



En este capítulo se definen las secciones cónicas, se obtienen sus ecuaciones, así como se analizan sus propiedades. El capítulo concluye con una discusión de la propiedad del foco y la directriz que se ilustra en el siguiente diagrama

Secciones Cónicas

Los conjuntos como lugares geométricos

4–1 La ecuación de un lugar geométrico

Se puede decir que cualquier conjunto de puntos, tal como una recta, es un **lugar geométrico.** El término lugar geométrico se aplica normalmente al conjunto de todos los puntos que tienen alguna característica geométrica común. Por ejemplo (véase los Ejercicios 35 y 36, página 68) el lugar geométrico de todos los puntos **U** del plano que son equidistantes a dos puntos fijos **S** y **T** es una recta, a saber la recta $\mathcal{L}$ que es perpendicular al segmento $\overline{\mathbf{ST}}$ en su punto medio. (Figura 4–1).

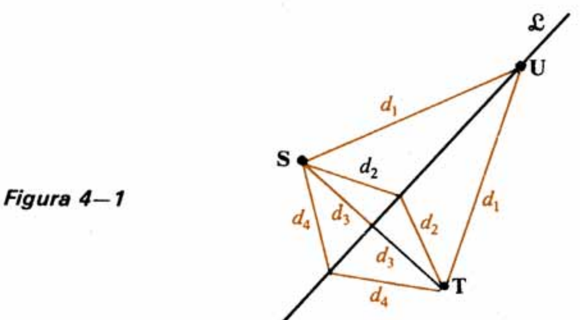


Figura 4–1

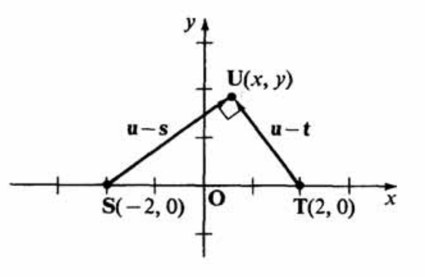
En el Capítulo 2 se estudió la solución del problema de obtener la ecuación cartesiana o vectorial de una recta dada. Este problema es un caso particular de un problema matemático más amplio: el obtener la ecuación del lugar geométrico $\mathcal{S}$ cuando se dan un conjunto de condiciones que definen a $\mathcal{S}$. Se dice que una ecuación **es ecuación de** $\mathcal{S}$ y que $\mathcal{S}$ es **la gráfica de** la ecuación si y sólo si la ecuación queda satisfecha por las coordenadas de cada punto en $\mathcal{S}$, *y* cada punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación está en $\mathcal{S}$. Normalmente al determinar la ecuación de un lugar geométrico se intenta encontrar una ecuación que sea sencilla o que esté en alguna forma ordinaria.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación cartesiana del lugar geométrico $\mathcal{C}$ de todos los puntos tales que el segmento que va de cualquier punto de $\mathcal{C}$ a $\mathbf{S}(-2, 0)$ es perpendicular al segmento que va del punto a $\mathbf{T}(2, 0)$.

Solución 1 (vectorial):

Sea $\mathbf{U}(x, y)$ cualquier punto del lugar geométrico indicado. Puesto que $\overline{\mathbf{US}} \perp \overline{\mathbf{UT}}$,

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{t}) = 0,$$
$$(x + 2, y) \cdot (x - 2, y) = 0,$$
$$x^2 - 4 + y^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 4. \quad (1)$$



Por consiguiente las coordenadas de cualquier punto del lugar geométrico satisfacen la Ecuación (1).

Recíprocamente puesto que los pasos algebraicos expuestos son reversibles, y puesto que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0, cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la Ecuación (1) está sobre el lugar geométrico indicado. Por lo tanto la Ecuación (1) es la ecuación de ese lugar geométrico.

Solución 2(método no vectorial):

Si $\overline{\mathbf{US}} \perp \overline{\mathbf{UT}}$, entonces el triángulo **STU** es rectángulo. Empleando el Teorema de Pitágoras se tiene pues para todos los puntos del lugar geométrico

$$[d(\mathbf{S}, \mathbf{U})]^2 + [d(\mathbf{T}, \mathbf{U})]^2 = [d(\mathbf{S}, \mathbf{T})]^2.$$

Empleando la fórmula de distancia se tiene

$$[(x + 2)^2 + y^2] + [(x - 2)^2 + y^2] = 16,$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 16,$$
$$2x^2 + 2y^2 + 8 = 16,$$

es decir

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Nuevamente los pasos algebraicos son reversibles; y **STU** es un triángulo rectángulo por el recíproco del Teorema de Pitágoras. Es decir la Ecuación (1) es la ecuación del lugar geométrico indicado.

Los pasos que hay que seguir para obtener una ecuación simple, u ordinaria, de un lugar geométrico se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Sea $\mathbf{U}(x, y)$ cualquier punto del lugar geométrico, y escríbase una ecuación que quede satisfecha por $\mathbf{u}$ o por x y y.
2. Efectúense las transformaciones necesarias para simplificar esta ecuación.
3. Verifíquese que cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación final esté en el lugar geométrico. (Es a veces conveniente hacer esto último observando que las transformaciones efectuadas en el paso 2 son reversibles).

Al obtener la ecuación de un lugar geométrico es a veces más sencillo emplear métodos vectoriales, pero otras veces es más sencillo emplear métodos cartesianos.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación cartesiana del lugar geométrico $\mathcal{H}$ de todos los puntos tales que la pendiente del segmento que conecta a cada punto de $\mathcal{H}$ con $\mathbf{S}(1, 2)$ es la mitad de la pendiente del segmento que los conecta con $\mathbf{T}(2, 5)$.

Solución: Sea $\mathbf{U}(x, y)$ cualquier punto del lugar geométrico en cuestión. Entonces por la fórmula que permite calcular la pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, la pendiente de $\overline{\mathbf{US}}$ es $\dfrac{y-2}{x-1}$ y la pendiente de $\overline{\mathbf{UT}}$ es $\dfrac{y-5}{x-2}$. Por lo tanto de las condiciones dadas se tiene

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{y-5}{x-2}\right), \tag{2}$$

donde, para $x \neq 1$ y $x \neq 2$, se obtiene

$$2(y-2)(x-2) = (x-1)(y-5),$$
$$2xy - 4x - 4y + 8 = xy - y - 5x + 5,$$
$$xy + x - 3y + 3 = 0.$$

El primer miembro de la Ecuación (2) no está definido para $x = 1$, y el segundo miembro no está definido para $x = 2$; por lo tanto el lugar geométrico no incluye puntos que tengan estos valores de sus coordenadas x.

Puesto que los pasos algebraicos son reversibles se concluye que

$$xy + x - 3y + 3 = 0, \quad x \neq 1, x \neq 2,$$

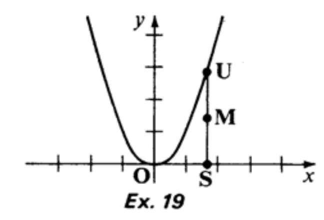
es una ecuación de $\mathcal{H}$.

Ejercicios 4 — 1

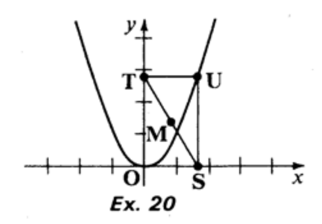
En los Ejercicios 1 — 18, obtenga una ecuación del lugar geométrico $\mathcal{C}$ de los puntos del plano que satisfacen las condiciones dadas.

1. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de los puntos $\mathbf{S}(1, 4)$ y $\mathbf{T}(3, 7)$.
2. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de los puntos $\mathbf{S}(-3, 2)$ y $\mathbf{T}(2, -5)$.

3. Cada punto de $\mathcal{C}$ está a 6 unidades del punto **S**(2, 4).
4. Cada punto de $\mathcal{C}$ está a $\sqrt{7}$ unidades del punto **S**(−1, −3).
5. El segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con **S**(−3, 0) es perpendicular al segmento que conecta al punto con **T**(3, 0).
6. Repita el Ejercicio 5 para **S**(1, 2) y **T**(5, −2).
7. La pendiente del segmento que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con **S**(1, 6) es el doble de la pendiente del segmento que lo conecta con **T**(3, 2).
8. La pendiente del segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con **S**(2, −3) es dos tercios de la pendiente del segmento de recta que conecta al punto con **T**(−1, 4).
9. La pendiente del segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con **S**(2, 5) es dos unidades mayor que la pendiente del segmento de recta que conecta al punto con **T**(−1, −2).
10. La pendiente del segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con **S**(1, −2) es 3 unidades menor que la pendiente del segmento de recta que conecta al punto con **T**(−1, 2).
11. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de **S**(6, 0) y del eje y.
12. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de **S**(0, 2) y de la recta cuya ecuación es $y + 2 = 0$.
13. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de **S**(1, 2) y de la recta cuya ecuación es $x - y - 5 = 0$.
14. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de **S**(3, −2) y de la recta cuya ecuación es $x - y = 0$.
15. La distancia que separa a cada punto de $\mathcal{C}$ de **S**(4, 0) es la mitad de la distancia que separa al punto de la recta cuya ecuación es $x + 8 = 0$.
16. La distancia que separa a cada punto de $\mathcal{C}$ de **S**(4, 0) es el doble de la distancia que lo separa de la recta cuya ecuación es $x + 8 = 0$.
* **17.** La suma de las distancias que separan a cada punto de $\mathcal{C}$ a **S**(−3, 0) y **T**(3, 0) es 10.
* **18.** El valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a cada punto de $\mathcal{C}$, a **S**(−5, 0) y **T**(5, 0) es 8.
* **19.** Sea **U** cualquier punto de la gráfica de $y = x^2$, y sea **S** la proyección (perpendicular) de **U** sobre el eje x. Obtenga una ecuación del lugar geométrico formado por los puntos medios **M** de $\overline{\mathbf{US}}$.



Ex. 19



Ex. 20

* **20.** Sea **U** cualquier punto de la gráfica de $y = x^2$, y sean **S** y **T** las proyecciones (perpendiculares) de **U** sobre los ejes x y y respectivamente. Encuentre una ecuación del lugar geométrico formado por los puntos medios **M** de $\overline{\mathbf{ST}}$.

* **21.** Sea **U** cualquier punto sobre la gráfica de $y = 3x^2$, y sean **S** y **T** las proyecciones (perpendiculares) de **U** sobre los ejes x y y respectivamente. Obtenga una ecuación del lugar geométrico formado por los puntos **Q** sobre $\overline{\mathbf{ST}}$ tales que están a la tercera parte de la distancia de **S** y **T**. (*Sugerencia*: trace un diagrama similar al que se empleó para resolver el Ejercicio 20).

Propiedades de las secciones cónicas

4–2 Circunferencia

En lo que resta de este Capítulo, así como en el Capítulo 5, se estudiarán las propiedades de una clase importante de lugares geométricos llamados *secciones cónicas*. Las circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas son ejemplos de secciones cónicas y se discutirán en el Capítulo 5.

Al estudiar geometría plana se ve que una circunferencia es el lugar geométrico (conjunto) de todos los puntos del plano que están a una distancia dada (radio) de un punto dado (centro). Al segmento cuyos extremos son el centro del círculo y a un punto de la circunferencia se llama **segmento radial** de la circunferencia. Por lo tanto, el radio de una circunferencia es la longitud de un segmento radial de la misma.

Como se muestra en la Figura 4–2, un punto $\mathbf{U}(x, y)$ del plano está sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 4 con centro en $\mathbf{S}(2, -1)$ si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{s}\| = 4. \qquad (1)$$

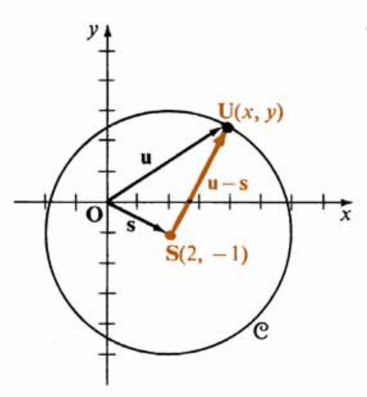


Figura 4–2

Obsérvese que, sin embargo,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{s}\| &= \|(x, y) - (2, -1)\| \\ &= \|(x - 2, y + 1)\| \\ &= \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto de la Ecuación (1) se tiene

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = 4.$$

Puesto que ambos miembros de esta ecuación son números positivos al tomar el cuadrado de ambos se obtiene una ecuación equivalente:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16. \qquad (2)$$

Puesto que los pasos algebraicos son reversibles la Ecuación (2) es una ecuación de $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}$ es la gráfica, o lugar geométrico de la Ecuación (2).

Empleando el mismo procedimiento se puede demostrar que, en general, si una circunferencia $\mathcal{C}$ tiene radio r y centro en $\mathbf{S}(h, k)$ entonces una ecuación cartesiana de $\mathcal{C}$ es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \qquad (3)$$

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia de radio 6 con centro en $\mathbf{S}(4, -7)$.

Solución: Haciendo $h = 4$, $k = -7$ y $r = 6$, de la Ecuación (3) se obtiene $(x - 4)^2 + [y - (-7)]^2 = 6^2$, o sea

$$(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 36.$$

Si se desarrolla el primer miembro de la Ecuación (3), página 125 se obtiene

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2,$$

o bien $$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Esta ecuación es a su vez de la forma general

■ $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{4}$$

donde D, E y F son constantes.

Se puede escribir a una ecuación que esté en la forma (4) en forma equivalente escribiendo

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = c \tag{5}$$

simplemente completando cuadrados de x y y.

Ejemplo 2. Determine el lugar geométrico en $\mathbb{R}^2$ de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$$

Solución: Se puede reescribir esta ecuación y completar los cuadrados de x y y como sigue:

$$x^2 - 6x + (-3)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 = -4 + (-3)^2 + (2)^2,$$
$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9,$$
$$(x - 3)^2 + [y - (-2)]^2 = 3^2.$$

Por lo tanto el lugar geométrico es una circunferencia de radio 3 con centro en el punto $\mathbf{S}(3, -2)$.

Puesto que el cuadrado del radio de una circunferencia debe ser un número positivo, una ecuación de la forma (4) no representa necesariamente un lugar geométrico que sea una circunferencia. Si, después de haber completado a cuadrados en x y y, y después de haberse escrito la ecuación en la forma (5), el segundo miembro, c, es cero, entonces el lugar geométrico consta de un solo punto. Si c es negativo el lugar geométrico es el conjunto vacío $\emptyset$.

Se puede emplear la Ecuación (4) anterior para determinar la ecuación de una circunferencia $\mathcal{C}$ cuando se conocen tres puntos que estén sobre $\mathcal{C}$.

Ejemplo 3. Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por los puntos $\mathbf{Q}(3, -2)$, $\mathbf{S}(-1, -4)$ y $\mathbf{T}(2, -5)$.

Solución: Las constantes D, E y F deben ser tales que las coordenadas de cada punto satisfagan

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 3^2 + (-2)^2 + 3D - 2E + F &= 0 \\ (-1)^2 + (-4)^2 - D - 4E + F &= 0 \\ (2)^2 + (-5)^2 + 2D - 5E + F &= 0, \quad \text{o bien} \\ 3D - 2E + F &= -13 \\ -D - 4E + F &= -17 \\ 2D - 5E + F &= -29 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, es decir, despejando a D, E y F se ve que

$$D = -2, E = 6, \text{ y } F = 5.$$

Por lo tanto, una ecuación cartesiana de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0.$$

Dada una recta $\mathcal{L}$ tangente a una circunferencia es perpendicular al segmento radial que contiene al punto de contacto **T** (figura 4–3) se sabe que si **v** es un vector de dirección de la recta que contiene al segmento radial $\overline{\mathbf{TS}}$ entonces $\mathbf{v}_p$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Se emplea esta información para encontrar una ecuación $\mathcal{L}$ si se conocen las coordenadas de **T** y la ecuación de $\mathcal{C}$.

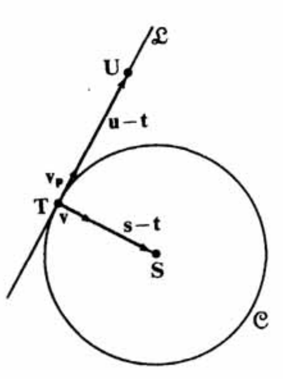


Figura 4—3

Ejemplo 4. Obtenga una ecuación cartesiana de la recta $\mathcal{L}$ que es tangente en el punto $\mathbf{T}(6, -4)$ a la circunferencia $\mathcal{C}$ cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

Solución: Obsérvese primero que **T** está sobre $\mathcal{C}$ puesto que

$$6^2 + (-4)^2 - 4(6) + 2(-4) - 20 = 36 + 16 - 24 - 8 - 20 = 0.$$

Completando cuadrados en x y y en la ecuación de $\mathcal{C}$, se obtiene

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) &= 20 + 4 + 1, \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene su centro en $\mathbf{S}(2, -1)$ y un vector de dirección de la recta que contiene al segmento radial $\overline{\mathbf{TS}}$ es

$$\mathbf{s} - \mathbf{t} = (2, -1) - (6, -4) = (-4, 3).$$

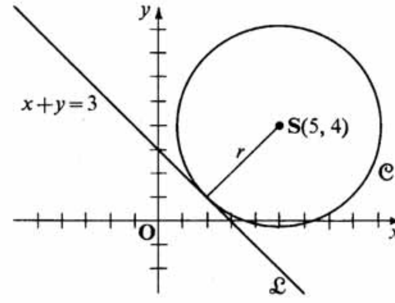
Por consiguiente, un punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{t}) &= 0, \\ [(x, y) - (6, -4)] \cdot (-4, 3) &= 0, \\ (x - 6, y + 4) \cdot (-4, 3) &= 0, \\ -4x + 24 + 3y + 12 &= 0, \\ 4x - 3y - 36 &= 0. \end{aligned}$$

Como se sugiere en la Figura 4–3, el radio r y de una circunferencia $\mathcal{C}$ es igual a la distancia (perpendicular) que separa al centro $\mathbf{S}$ de $\mathcal{C}$ de cualquier recta $\mathcal{L}$ que sea tangente a $\mathcal{C}$. Se puede emplear este hecho para obtener la ecuación de una circunferencia dadas las coordenadas (x_1, y_1) de su centro y una ecuación $Ax + By + C = 0$ de una recta tangente.

Ejemplo 5. Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia cuyo centro es $\mathbf{S}(5, 4)$ si la recta cuya ecuación es $x + y = 3$ es tangente a $\mathcal{C}$.

Solución: Trácese un diagrama. En la ecuación $Ax + By + C = 0$ para $\mathcal{L}$, se tiene $A = 1$, $B = 1$ y $C = -3$. También se tiene $(x_1, y_1) = (5, 4)$.



Por lo tanto (véase página 94) el radio r de $\mathcal{C}$ está dado por

$$r = d(\mathbf{S}, \mathcal{L})$$

$$= \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{5 + 4 - 3}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

Sustituyendo a $(5, 4)$ por (h, k) y a $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ por r en la Ecuación (3) de la página 125 se obtiene

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 18$$

que es una ecuación de $\mathcal{C}$.

Ejercicios 4–2

En los Ejercicios 1–6, obtenga una ecuación en la forma (3) de la página 125 de la circunferencia con el radio r y centro $\mathbf{S}$ dados.

1. $r = 2$, $\mathbf{S}(3, 4)$

2. $r = 4$, $\mathbf{S}(1, 5)$

3. $r = 7$, $\mathbf{S}(2, -3)$

4. $r = 5$, $\mathbf{S}(-3, 4)$

5. $r = 3$, $\mathbf{S}(-2, -4)$

6. $r = 6$, $\mathbf{S}(-8, -1)$

En los Ejercicios 7–14, obtenga una ecuación de la forma (3), página 125, de la circunferencia $\mathcal{C}$ cuya ecuación se da.

7. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$
8. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
9. $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 15 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 29 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 14x + 16y + 13 = 0$
12. $x^2 + y^2 + 12x + 10y - 3 = 0$
13. $4x^2 + 4y^2 + 12x - 20y - 66 = 0$
14. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$

En los Ejercicios 15—18, obtenga una ecuación de la forma (4), página 126, de la circunferencia que pasa por los puntos dados **Q**, **S** y **T**.

15. $\mathbf{Q}(5, 4)$, $\mathbf{S}(4, -3)$, $\mathbf{T}(-2, 5)$
16. $\mathbf{Q}(5, 7)$, $\mathbf{S}(6, 0)$, $\mathbf{T}(-1, -1)$
17. $\mathbf{Q}(1, 9)$, $\mathbf{S}(8, 2)$, $\mathbf{T}(-9, 9)$
18. $\mathbf{Q}(3, -10)$, $\mathbf{S}(10, 7)$, $\mathbf{T}(-7, -10)$

En los Ejercicios 19—24, obtenga una ecuación cartesiana de la recta $\mathcal{L}$ que es tangente en el punto **T** a la circunferencia cuya ecuación se da.

19. $\mathbf{T}(0, 0)$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
20. $\mathbf{T}(0, 0)$; $x^2 + y^2 - 10x - 4y = 0$
21. $\mathbf{T}(2, 1)$; $x^2 + y^2 - 12x + 14y + 5 = 0$
22. $\mathbf{T}(3, 2)$; $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$
23. $\mathbf{T}(-3, 1)$; $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0$
24. $\mathbf{T}(2, -1)$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

En los Ejercicios 25—30, obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia $\mathcal{C}$ cuyo centro **S** que es tangente y ecuación de la tangente son dados.

25. $\mathbf{S}(3, 4)$, $x = 8$
26. $\mathbf{S}(5, 2)$, $y = 5$
27. $\mathbf{S}(1, -5)$, $x + y = 5$
28. $\mathbf{S}(-2, 3)$, $x - y = 7$
29. $\mathbf{S}(-2, -4)$, $2x - y = 4$
30. $\mathbf{S}(-3, -5)$, $2x + 3y = 5$

En los Ejercicios 31—38, obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

31. Pasa por los puntos $\mathbf{S}(-1, -3)$ y $\mathbf{T}(-5, 3)$ con centro sobre la recta cuya ecuación es $x - 2y + 2 = 0$.
32. Pasa por los puntos $\mathbf{S}(0, 0)$ y $\mathbf{T}(6, 2)$ con centro sobre la recta cuya ecuación es $2x - y = 0$.
33. Es tangente al eje x en el punto $\mathbf{S}(4, 0)$ y pasa por el punto $\mathbf{T}(7, 1)$.
34. Es tangente a la recta cuya ecuación es $4x - 3y - 2 = 0$ en el punto $\mathbf{S}(6, -1)$, y pasa por el punto $\mathbf{T}(6, 1)$.
35. Tiene su centro en $\mathbf{S}(-1, 4)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $5x + 12y + 9 = 0$.
36. Tiene su centro en $\mathbf{S}(2, 4)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $x + y - 4 = 0$.
37. Es tangente a la recta cuya ecuación es $2x - y + 6 = 0$ en el punto $\mathbf{S}(-1, 4)$, y tiene radio $3\sqrt{5}$. (Dos soluciones).
38. Es tangente a la recta cuya ecuación es $x - 2y - 3 = 0$ en el punto $\mathbf{S}(-1, -2)$, y tiene radio $\sqrt{5}$. (Dos soluciones).

* **39.** Demuestre que para tres puntos no colineales $\mathbf{R}(x_1, y_1)$, $\mathbf{S}(x_2, y_2)$, $\mathbf{T}(x_3, y_3)$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por **R**, **S** y **T**.

* **40.** Trace la gráfica de la ecuación que aparece en el Ejercicio 39 en el caso que **R**, **S** y **T** sean puntos colineales distintos.

4–3 Parábola

El conjunto $\mathcal{P}$ de puntos del plano tales que están a la misma distancia de una recta dada $\mathcal{D}$ y de un punto dado **F** que no esté sobre $\mathcal{D}$ recibe el nombre de **parábola** (véase la Figura 4–4).

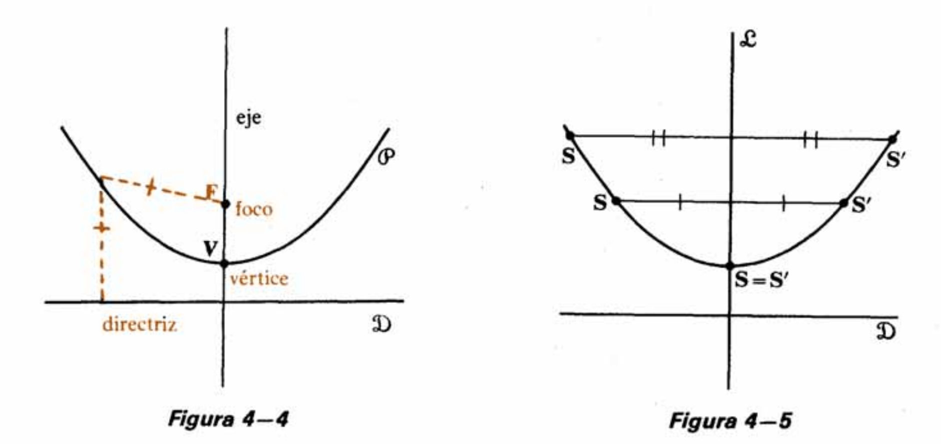


Figura 4–4 *Figura 4–5*

El punto **F** es el **foco** de la parábola y la recta $\mathcal{D}$ es la **directriz** de la parábola. La recta que contiene al foco de la parábola y que es perpendicular a la directriz es el **eje** (o **eje de simetría**) de la parábola. El punto **V** de intersección de una parábola con su eje recibe el nombre de **vértice** de la parábola.

Se dice que dos puntos **S** y **S′** son *simétricos con respecto a una recta* $\mathcal{L}$ si $\mathcal{L}$ es la bisectriz perpendicular del segmento $\overline{\mathbf{SS'}}$. Se dice que un *conjunto* de puntos es *simétrico con respecto a la recta* $\mathcal{L}$. si para cada punto **S** del conjunto existe otro punto del conjunto **S′** tal que **S** y **S′** sean simétricos con respecto a $\mathcal{L}$. (Figura 4–5). Se sigue directamente de la definición de *parábola* que una parábola es simétrica con respecto a su eje.

En la Figura 4–6 se ilustra una construcción mecánica simple de un arco de la parábola con foco en **F** y cuya directriz es $\mathfrak{D}$. Colóquese una regla T (o cualquier otra regla) formando un ángulo recto con $\mathfrak{D}$ en el punto **A** y elíjase un punto **B** sobre la regla. Sujétese a los puntos **F** y **B** los extremos de un hilo de longitud $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. En estas circunstancias la punta de un lápiz que mantenga en tensión al hilo y éste en contacto con el borde de la regla (en el punto **U** de la Figura 4–6) describirá el arco de parábola al deslizarse el punto **A** sobre $\mathfrak{D}$, manteniéndose la regla perpendicular a $\mathfrak{D}$.

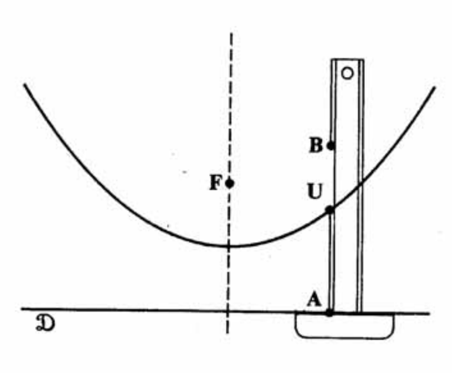


Figura 4–6

Para obtener una ecuación de la parábola que tiene su foco en el punto **F**(0, 2) y cuya directriz $\mathfrak{D}$ es la recta cuya ecuación es $y = -2$ (Figura 4–7),

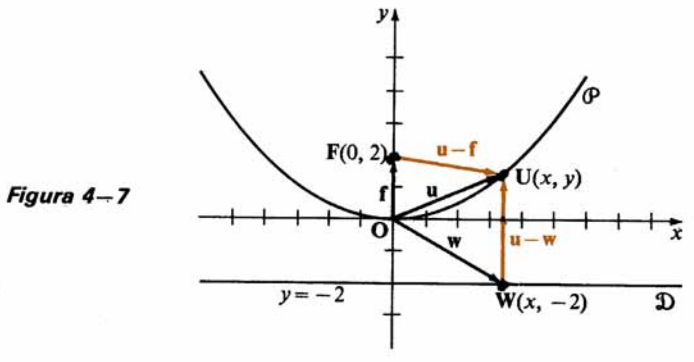


Figura 4–7

obsérvese que **U**(x, y) es un punto del lugar geométrico si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|,$$

donde **W** es la proyección (perpendicular) de **U** sobre $\mathfrak{D}$. Entonces como **U** tiene las coordenadas (x, y), **F** tiene como coordenadas a $(0, 2)$, y **W** tiene como coordenadas a $(x, -2)$, se tiene

$$\|(x, y) - (0, 2)\| = \|(x, y) - (x, -2)\|,$$
$$\|(x - 0, y - 2)\| = \|(x - x, y + 2)\|,$$
$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{0^2 + (y + 2)^2},$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = (y + 2)^2,$$
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4,$$

o bien

$$x^2 = 8y.$$

Puesto que las raíces cuadradas involucradas en este cálculo son no negativas, los pasos de este proceso son reversibles y la gráfica de $x^2 = 8y$ es la parábola requerida.

Mediante un razonamiento similar se puede demostrar que una ecuación de la parábola cuyo foco es $\mathbf{F}(0, p)$ y cuya directriz es la recta $\mathfrak{D}$ está dada por $y = -p$ es

$$x^2 = 4py, \tag{1}$$

Las ecuaciones (1) y (2) reciben el nombre se **formas ordinarias** de la ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco sobre un eje de coordenadas. Si $p > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba o hacia la derecha; si $p < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo o hacia la izquierda. Las diferentes posibilidades se muestran en la Figura 4–8.

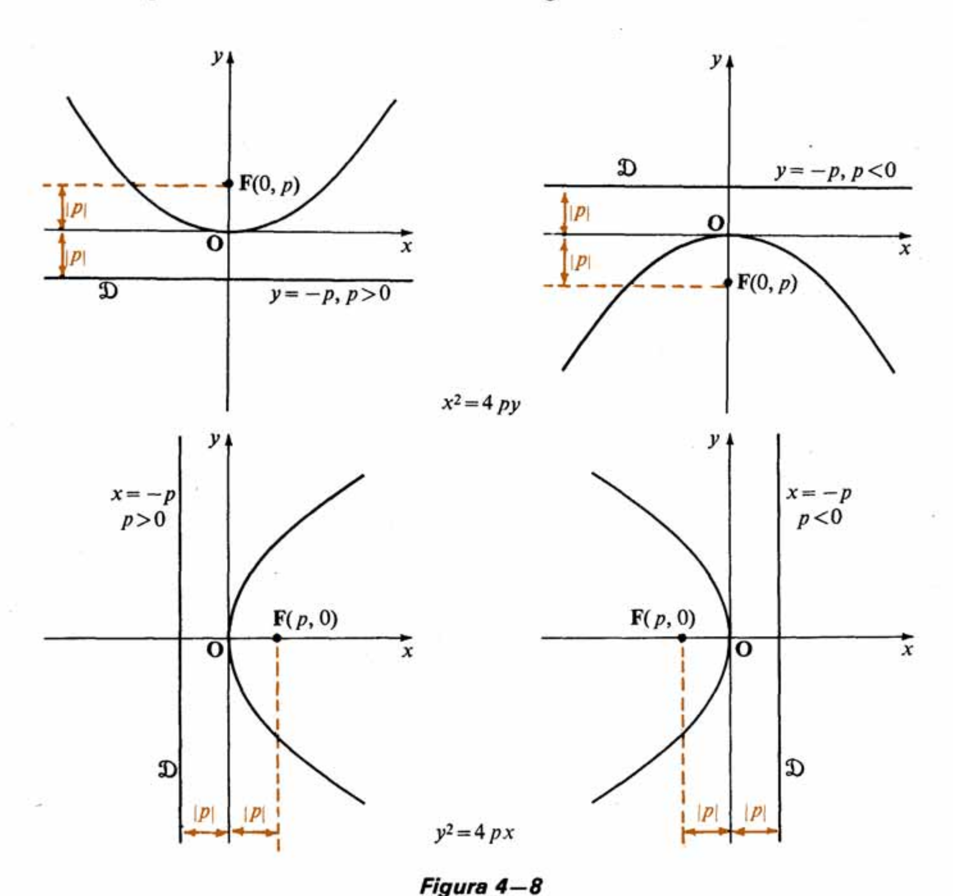
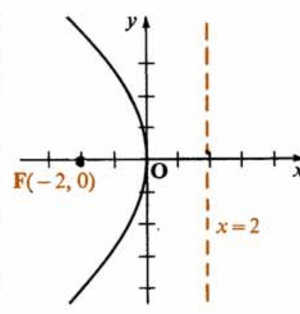


Figura 4—8

Obsérvese que en cada caso el vértice está a $|p|$ unidades de distancia tanto del foco como de la directriz.

Ejemplo. Calcule las coordenadas del foco $\mathbf{F}$ y una ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -8x$. Trace un esquema de esta curva.

Solución: Comparando $y^2 = -8x$ con la Ecuación (2), página 131, se ve que $p = -2$. Por lo tanto las coordenadas de **F** son $(-2, 0)$ y $\mathfrak{D}$ tiene como ecuación $x = 2$. Puesto que y^2 es siempre no negativo y $y^2 = -8x$, x debe ser no positivo para todos los puntos que estén sobre la parábola, y la gráfica tiene la apariencia que se muestra.



Ejercicios 4−3

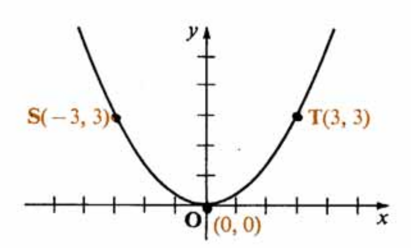
En los Ejercicios 1−8, obtenga una ecuación cartesiana de la parábola con vértice en el origen y con foco en el punto dado **F**. Obtenga también una ecuación cartesiana de la directriz.

1. **F**(0, 3)
2. **F**(0, 5)
3. **F**(2, 0)
4. **F**(4, 0)
5. **F**(−1, 0)
6. **F**(0, −4)
7. **F**(0, −5)
8. **F**(−3, 0)

En los Ejercicios 9−12, calcule las coordenadas del foco, y obtenga una ecuación cartesiana de la directriz, de la parábola con vértice en el origen y que pasa por los puntos dados **S** y **T**.

Ejemplo 1. **S**(−3, 3) y **T**(3, 3)

Solución: Trácese un esquema. Por inspección se ve que **S**(−3, 3) y



T(3, 3) son simétricos con respecto al eje y. Entonces como el vértice está en el origen, el eje y es el eje de la parábola, y según esto la parábola tiene una ecuación de la forma $x^2 = 4py$. Sustituyendo las coordenadas ya sea de **S** o de **T** en esta ecuación se obtiene:

$$9 = 12p,$$

o

$$p = \tfrac{3}{4}.$$

Por lo tanto las coordenadas del foco son $(0, \frac{3}{4})$, y una ecuación de la directriz es $y = -\frac{3}{4}$.

9. S(−4, 2) y T(4, 2)
10. S(−5, 5) y T(−5, −5)
11. S(2, 4) y T(2, −4)
12. S(−6, −8) y T(6, −8)

En los Ejercicios 13—16 obtenga una ecuación cartesiana de la parábola que satisface las condiciones dadas.

13. Vértice en el origen, eje sobre el eje x, pasa por el punto S(8, 8).
14. Vértice en el origen, eje sobre el eje x, pasa por el punto S(9, 6).
15. Vértice en el origen, eje sobre el eje y, pasa por el punto S(−2, 4).
16. Vértice en el origen, eje sobre el eje y, pasa por el punto S(−4, 48).

En los Ejercicios 17—22 emplee la definición de parábola para obtener una ecuación cartesiana de la parábola con el foco dado **F** y con la directriz dada.

Ejemplo 2. **F**(3, 4);
Ecuación de la directriz: $x = 7$.

Solución: El esquema de la curva se muestra en la figura. Un punto **U**(x, y) está sobre la parábola si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|.$$

Entonces, puesto que las coordenadas de **U**, **F** y **W** son, (x, y), $(3, 4)$, y $(7, y)$, respectivamente se tiene

$$\|(x, y) - (3, 4)\| = \|(x, y) - (7, y)\|,$$

o bien

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + 0^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando se tiene

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - 7)^2,$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 14x + 49,$$
$$y^2 - 8y + 8x - 24 = 0.$$

Puesto que los pasos algebraicos son reversibles esta es una ecuación de la parábola.

17. F(5, 2); ecuación de la directriz: $x = 1$.
18. F(−3, 2); ecuación de la directriz: $x = -7$.

19. F(4, −5); ecuación de la directriz: $y = 1$.
20. F(−2, −5); ecuación de la directriz: $y = -4$.
21. F(8, 0); ecuación de la directriz: $x = 1$.
22. F(0, −3); ecuación de la directriz: $y = 10$.

La forma general de la ecuación cartesiana de una parábola con eje paralelo al eje y es

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

Esta parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o bien hacia abajo si $a < 0$. En los Ejercicios 23—28, obtenga una ecuación de esta forma de la parábola $\mathcal{P}$ que pasa por los puntos dados **Q, S y T**.

Ejemplo 3. Q(0, 1), S(−1, 4), T(2, 1)

Solución: Puesto que cada punto está sobre la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, las coordenadas de estos puntos deben satisfacer esta ecuación. Se tiene pues

$$1 = a(0)^2 + b(0) + c$$
$$4 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$
$$1 = a(2)^2 + b(2) + c$$

o bien

$$c = 1$$
$$a - b + c = 4$$
$$4a + 2b + c = 1.$$

Resolviendo este sistema, es decir despejando a, b y c, se ve que $a = 1, b = -2$, y $c = 1$. Por lo tanto una ecuación de $\mathcal{P}$ es

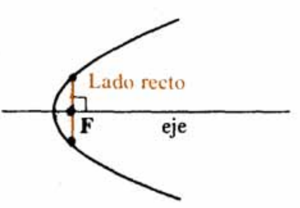
$$y = x^2 - 2x + 1.$$

23. Q(0, 1), S(1, 6), T(−1, 0)
24. Q(0, 2), S(1, −2), T(−1, 13)
25. Q(0, 3), S(1, 3), T(2, 1)
26. Q(0, 2), S(1, −1), T(−1, 1)
27. Q(0, −5), S(1, −2), T(−2, 7)
28. Q(0, 6), S(1, 1), T(−2, −14)

* **29.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la parábola $\mathcal{P}$ con foco en F(0, p) y cuya directriz $\mathcal{D}$ tiene la ecuación $y = -p$ es $x^2 = 4py$.

* **30.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la parábola $\mathcal{P}$ con foco en F(p, 0) y cuya directriz $\mathcal{D}$ tiene la ecuación $x = -p$ es $y^2 = 4px$.

El segmento que es perpendicular al eje focal de la parábola, cuyo punto medio es el foco y cuyos extremos están sobre la parábola es el *lado recto*, y la longitud del lado recto se llama *ancho focal* de la parábola.



* **31.** Demuestre que el ancho focal de la parábola cuya ecuación es $x^2 = 4py$ está dado por $|4p|$.

* **32.** Demuestre que el ancho focal de la parábola cuya ecuación es $y^2 = 4px$ está dada por $|4p|$.

*** 33.** Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por el vértice y por los extremos del lado recto de la parábola cuya ecuación es $x^2 = 4py$.

*** 34.** Demuestre que la circunferencia $\mathcal{C}$ para la cual uno de cuyos diámetros es el lado recto de la parábola $\mathcal{P}$ cuya ecuación es $x^2 = 4py$, es tangente a la directriz de $\mathcal{P}$.

*** 35.** Demuestre que para cualesquiera tres puntos no colineales $\mathbf{R}(x_1, y_1)$, $\mathbf{S}(x_2, y_2)$ y $\mathbf{T}(x_3, y_3)$, donde x_1, x_2, y x_3 son todos distintos.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación cartesiana de la parábola con eje vertical que pasa por los puntos **R, S** y **T**.

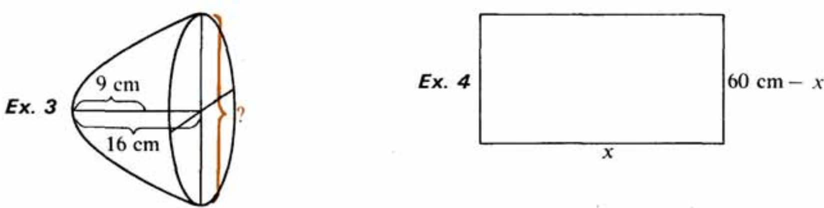
*** 36.** Trace la gráfica de la ecuación que aparece en el Ejercicio 35 en el caso que **R, S** y **T** sean colineales.

Problemas de aplicación 4—3

1. Un arco parabólico de acero, tiene diez metros de altura, con el eje vertical y cuyos puntos de apoyo están separados por 20 m. ¿Está el foco de la parábola sobre el suelo o debajo de él, y a qué distancia de la superficie está?

2. Se planea hacer un arco parabólico, con eje vertical y cuyos puntos de apoyo están separados por una distancia de 30 m. Si el foco de la parábola debe estar a 8 m. de altura ¿cuál es la altura que debe tener el arco?

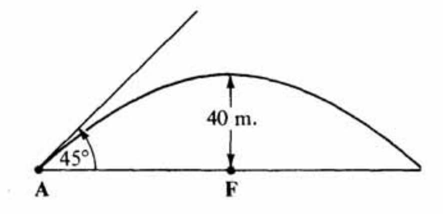
3. Se tiene un reflector parabólico cuya forma se obtiene haciendo girar un arco de parábola que empieza en el vértice, alrededor del eje de la parábola. Si el foco está a 9 cm del vértice y el arco parabólico tiene 16 cm de profundidad. ¿Cuál es la abertura del reflector?



4. Hay que encerrar a un campo rectangular mediante una cerca de 120 m de longitud. Demuestre que si y es el área cuando uno de los lados tiene longitud x, entonces $y = 60x - x^2$. Trace la gráfica de esta ecuación para $0 \leq x \leq 60$. ¿Para qué valor de x el área es máxima?

5. Cuando se arroja una piedra desde un punto **A** la piedra viaja aproximadamente a lo largo de un arco parabólico con eje vertical. Si se arroja la

piedra en una dirección que forma un ángulo de 45° con la horizontal, entonces el foco de la parábola está sobre una recta horizontal que pasa por **A**. Supongamos que una piedra que se lanza con este ángulo de elevación llega a una altura máxima de 40 m. ¿Qué distancia recorre la piedra horizontalmente hasta el momento de alcanzar una altura igual a la del punto **A**?



4–4 Elipse

Dados dos puntos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ del plano, el conjunto $\mathcal{E}$ de puntos $\mathbf{U}(x, y)$ del plano tales que la suma de las distancias de **U** a $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ es una constante dada mayor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, recibe el nombre de **elipse** (véase la Figura 4–9). Los puntos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se llaman **focos** de la elipse, y la recta que contiene a los focos recibe el nombre de **eje principal** de la elipse. El punto **C** que bisecta al segmento $\overline{\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2}$ recibe el nombre de **centro** de la elipse. Los puntos de intersección de la elipse con su eje principal, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en la Figura 4–9, son los **vértices** de la elipse, y el segmento cuyos extremos son los vértices recibe el nombre de **eje mayor** de la elipse. El segmento que es perpendicular al eje mayor, que pasa por el centro y cuyos extremos están sobre la elipse es el **eje menor** de la elipse.

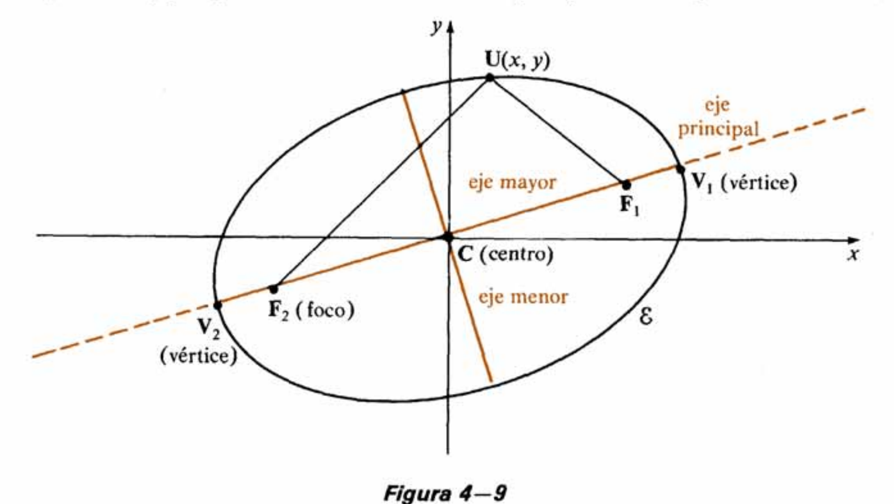


Figura 4–9

Se puede visualizar la construcción de una elipse mediante el método del jardinero. Se empieza colocando dos estacas en el suelo y rodeándolas con un lazo que no esté tirante. Si ahora se mantiene el lazo tirante mediante otra estaca y se mueve esta alrededor de las otras dos, manteniendo siempre tirante la cuerda, la tercera estaca recorrerá una trayectoria elíptica, como se indica en la Figura 4–10.

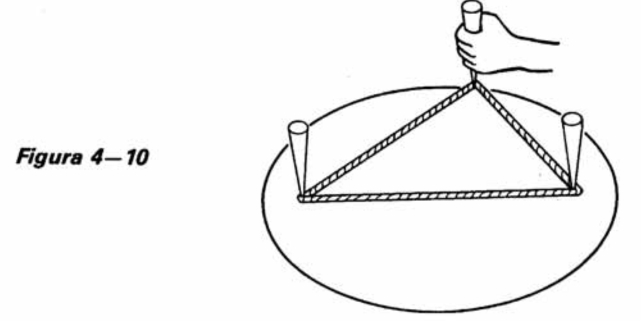
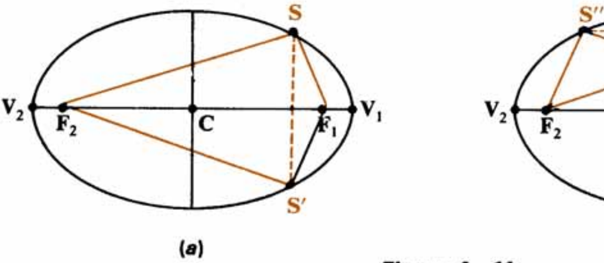


Figura 4—10

Algunas propiedades de las elipses son aparentes de la misma definición. Si se analiza la Figura 4–11(a), por ejemplo, se ve que una elipse es simétrica (véase la página 130) con respecto a su eje principal; y analizando la Figura 4–11(b) se ve que es también simétrica con respecto a la recta que contiene a su eje menor.



(a) (b)

Figura 4—11

Como se muestra en la Figura 4–12, sea c la distancia que separa a cada foco del centro de una elipse $\mathcal{E}$ de modo que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 2c$. Sea ahora $2a$ la suma de las distancias que separan a cada punto $\mathbf{U}$ de $\mathbf{F}_1$ de $\mathcal{E}$ y $\mathbf{F}_2$:

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{U}) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{U}) = 2a.$$

Puesto que esta suma debe ser mayor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, tenemos $2a > 2c$, o bien $a > c$.

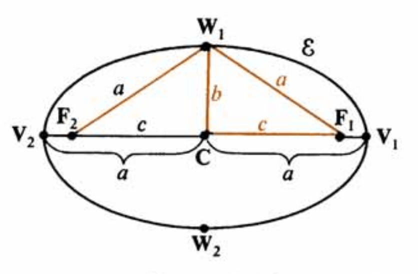


Figura 4—12

Puesto que el vértice $\mathbf{V}_1$, en particular, es un punto de $\mathcal{E}$, se tiene

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{V}_1) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{V}_1) = 2a. \tag{1}$$

Ahora por simetría

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{V}_1) = d(\mathbf{V}_2, \mathbf{F}_2). \tag{2}$$

Sustituyendo la Ecuación (2) en la Ecuación (1) se tiene

$$d(\mathbf{V}_2, \mathbf{F}_2) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{V}_1) = 2a,$$

o bien

$$d(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1) = 2a.$$

Por consiguiente, la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud $d(\mathbf{C}, \mathbf{V}_1)$ de un semieje mayor es a

Puesto que un extremo $\mathbf{W}_1$ del eje menor está sobre $\mathcal{E}$, se tiene

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{W}_1) = 2a,$$

o por simetría

$$2d(\mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1) = 2a,$$
$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1) = a.$$

Por lo tanto, si b es la longitud $d(\mathbf{C}, \mathbf{W}_1)$ de un semieje menor de $\mathcal{E}$, entonces por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{3}$$

Es posible obtener la ecuación de una elipse con centro en el origen y focos sobre el eje x de la siguiente manera; supóngase que la elipse $\mathcal{E}$ (figura 4–13) tiene los focos $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y que para cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de $\mathcal{E}$ la

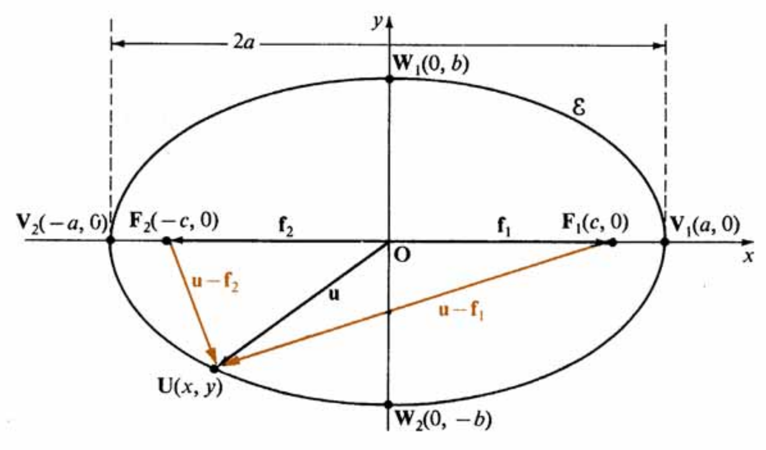


Figura 4—13

suma de las distancias que separan a $\mathbf{U}$ de $\mathbf{F}_1$ y de $\mathbf{F}_2$ es la constante $2a$, donde $2a > 2c$, o sea $a > c$. Entonces una ecuación vectorial de $\mathcal{E}$ es

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}_2\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_1\| = 2a.$$

Puesto que $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{f}_1 = (c, 0)$, y $\mathbf{f}_2 = (-c, 0)$, se tiene

$$\|(x, y) - (-c, 0)\| + \|(x, y) - (c, 0)\| = 2a,$$
$$\|(x + c, y)\| + \|(x - c, y)\| = 2a,$$
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Si ahora se suma $-\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ a ambos miembros de esta ecuación, y se eleva al cuadrado a ambos miembros de la ecuación resultante, que es equivalente a la anterior, se obtiene

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Desarrollando los binomios y simplificando se obtiene

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{4}$$

Si ahora se eleva al cuadrado ambos miembros se tiene que

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Simplificando y factorizando se obtiene

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Puesto que $0 < c < a$, se sigue que $c^2 < a^2$ y $a^2 - c^2 > 0$. Si se hace $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$, entonces esta ecuación se reduce a

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

o bien dividiendo por a^2b^2, a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

Los pasos que se efectuaron para obtener la Ecuación (5) son reversibles, aunque hay que tener cuidado al considerar las raíces cuadradas que aparecen; no discutiremos en este libro los detalles. Se sigue que un punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre la elipse $\mathcal{E}$ si y sólo si sus coordenadas satisfacen la Ecuación (5); por lo tanto (5) es una ecuación cartesiana de la elipse.

De la Ecuación (5) se ve que una elipse es simétrica con respecto a su eje principal (en este caso el eje x) y que es también simétrica con respecto a la recta que contiene a su eje menor (en este caso el eje y). Es decir si el punto $\mathbf{S}(r, t)$ está sobre la gráfica de la Ecuación (5) los puntos $\mathbf{S}'(r, -t)$ y $\mathbf{S}''(-r, t)$ también lo están. De la Ecuación (5) se ve también que los extremos del eje mayor tienen como coordenadas a $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ y que los extremos del eje menor tienen como coordenadas a $(0, b)$ y $(0, -b)$, como se indica en la Figura 4–13.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación cartesiana de la elipse cuyos focos son $\mathbf{F}_1(3, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-3, 0)$ y cuyos vértices son $\mathbf{V}_1(5, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-5, 0)$. Además trace un esquema de la gráfica de la ecuación.

Solución: De los datos dados se tiene $a = 5$ y $c = 3$. Por lo tanto

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$= 25 - 9 = 16,$$

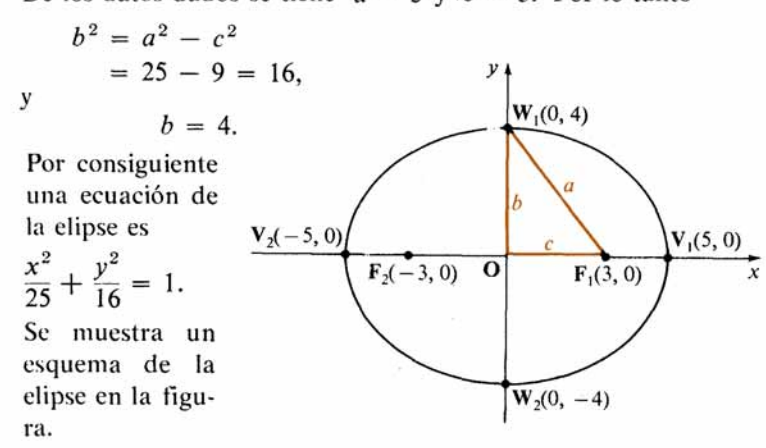
y

$$b = 4.$$

Por consiguiente una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Se muestra un esquema de la elipse en la figura.



Empleando el método que se mencionó anteriormente se puede demostrar que una ecuación de la elipse con focos en $\mathbf{F}_1(0, c)$ y $\mathbf{F}_2(0, -c)$, sobre el eje y, y cuya suma de distancias es igual a $2a$ es de la forma

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad (6)$$

donde $a > b > 0$ y $a^2 = b^2 + c^2$. Como se muestra en la Figura 4–14 el eje mayor de esta elipse está sobre el eje y y el eje menor está sobre el eje x. Las intersecciones de la elipse con los ejes x y y son $\pm b$ y $\pm a$, respectivamente: por consiguiente los extremos del eje mayor tienen como coordenadas $(0, a)$ y $(0, -a)$ y los extremos del eje menor tienen coordenadas $(b, 0)$ y $(-b, 0)$.

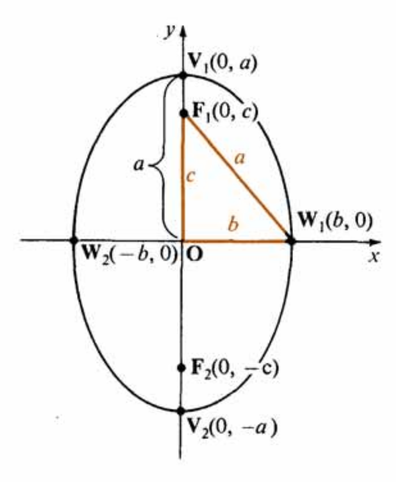


Figura 4—14

Ejercicios 4—4

En los Ejercicios 1—8, obtenga una ecuación de la forma (5) o (6) de la elipse cuyos focos y vértices se dan. Diga cuales son las longitudes de los ejes.

1. $\mathbf{F}_1(4, 0)$, $\mathbf{F}_2(-4, 0)$; $\mathbf{V}_1(5, 0)$, $\mathbf{V}_2(-5, 0)$

2. $\mathbf{F}_1(12, 0)$, $\mathbf{F}_2(-12, 0)$; $\mathbf{V}_1(13, 0)$, $\mathbf{V}_2(-13, 0)$

3. $\mathbf{F}_1(\sqrt{5}, 0)$, $\mathbf{F}_2(-\sqrt{5}, 0)$; $\mathbf{V}_1(3, 0)$, $\mathbf{V}_2(-3, 0)$

4. $\mathbf{F}_1(\sqrt{21}, 0)$, $\mathbf{F}_2(-\sqrt{21}, 0)$; $\mathbf{V}_1(5, 0)$, $\mathbf{V}_2(-5, 0)$

5. $\mathbf{F}_1(0, 4)$, $\mathbf{F}_2(0, -4)$; $\mathbf{V}_1(0, 5)$, $\mathbf{V}_2(0, -5)$

6. $\mathbf{F}_1(0, 3)$, $\mathbf{F}_2(0, -3)$; $\mathbf{V}_1(0, 5)$, $\mathbf{V}_2(0, -5)$

7. $\mathbf{F}_1(0, \sqrt{3})$, $\mathbf{F}_2(0, -\sqrt{3})$; $\mathbf{V}_1(0, \sqrt{7})$, $\mathbf{V}_2(0, -\sqrt{7})$

8. $\mathbf{F}_1(0, 2)$, $\mathbf{F}_2(0, -2)$; $\mathbf{V}_1(0, \sqrt{13})$, $\mathbf{V}_2(0, -\sqrt{13})$

En los Ejercicios 9—12, obtenga una ecuación de la forma (5) o (6) de la elipse cuyo centro es el origen y cuyas longitudes de los ejes son dadas. Diga cuales son las coordenadas de los focos.

9. $a = 5$, $b = 3$; el eje principal es el eje x

10. $a = 13$, $b = 12$; el eje principal es el eje x.

11. $a = \sqrt{13}$, $b = 3$; el eje principal es el eje y.

12. $a = \sqrt{7}$, $b = \sqrt{3}$; el eje principal es el eje y.

En los Ejercicios 13—20, calcule las coordenadas de los vértices V_1 y V_2 los focos F_1 y F_2 de la elipse cuya ecuación se da.

13. $4x^2 + 9y^2 = 36$
14. $16x^2 + 9y^2 = 144$
15. $16x^2 + y^2 = 64$
16. $9x^2 + 25y^2 = 225$
17. $4x^2 + 36y^2 = 36$
18. $25x^2 + 4y^2 = 100$
19. $7x^2 + 3y^2 = 21$
20. $24x^2 + 5y^2 = 120$

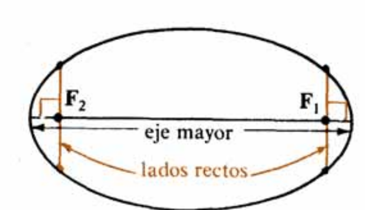
En los Ejercicios 21—24, obtenga una ecuación cartesiana de la elipse $\mathcal{E}$ cuyas características se dan y trace un esquema de dicha elipse.

21. Centro $\mathbf{O}(0, 0)$, ejes sobre los ejes coordenados y pasa por los puntos $\mathbf{S}(1, 3)$ y $\mathbf{T}(4, 2)$
22. Centro $\mathbf{O}(0, 0)$, ejes sobre los ejes coordenados y pasa por los puntos $\mathbf{S}(4, 3)$ y $\mathbf{T}(6, 2)$.
23. Focos $\mathbf{F}_1(4, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-4, 0)$, y pasa por el punto $\mathbf{S}(3, \frac{12}{5})$.
24. Centro $\mathbf{O}(0, 0)$, el eje principal es el eje y, la distancia que separa a los focos es 24 y pasa por el punto $\mathbf{S}(\frac{60}{13}, 5)$.

En los Ejercicios 25—28, emplee la definición de elipse para obtener una ecuación cartesiana de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos F_1 y F_2 están dados y para la cual está dada la suma de las distancias que separan a un punto de la elipse de los focos.

* **25.** $\mathbf{F}_1(2, 4)$, $\mathbf{F}_2(-2, 4)$; suma de distancias 6.
* **26.** $\mathbf{F}_1(3, 2)$, $\mathbf{F}_2(-3, 2)$; suma de distancias 8.
* **27.** $\mathbf{F}_1(6, 1)$, $\mathbf{F}_2(6, -1)$; suma de distancias 4.
* **28.** $\mathbf{F}_1(-2, 4)$, $\mathbf{F}_2(-2, -4)$; suma de distancias 12.

La longitud del segmento que es perpendicular al eje mayor de una elipse, que contiene a los focos de dicha elipse y cuyos extremos están sobre ella



recibe el nombre de *ancho focal* de la elipse. El segmento recibe el nombre de *lado recto* de la elipse.

* **29.** Demuestre que el ancho focal de una elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $\dfrac{2b^2}{a}$.

*** 30.** Demuestre que el ancho focal de una elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es

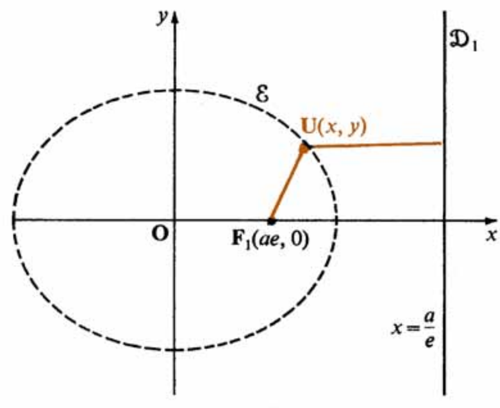
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es igual a $2b\sqrt{1 - e^2}$, donde $e = \dfrac{c}{a}$.

*** 31.** Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los puntos **U** tales que el cociente de la distancia que separa a **U** del punto $\mathbf{F}_1(ae, 0)$ (véase el Ejercicio 30) y la distancia que separa a **U** de la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \dfrac{a}{e}$ es igual a e. Demuestre que $\mathcal{E}$ es una elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siempre y cuando $e < 1$ y $b^2 = a^2(1 - e^2)$. (Véase el siguiente diagrama).



*** 32.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(0, c)$ y $\mathbf{F}_2(0, -c)$ y cuyos vértices son $\mathbf{V}_1(0, a)$ y $\mathbf{V}_2(0, -a)$ es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2 > 0$.

*** 33.** Demuestre que si $x_2^2 > x_1^2 > 0$ y $y_1^2 > y_2^2 > 0$, entonces

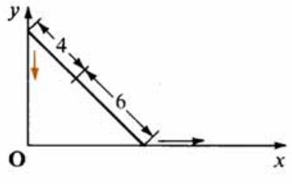
$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación cartesiana de una elipse o una circunferencia que pasa por los puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

*** 34.** Trace la gráfica de la ecuación que aparece en el Ejercicio 33, en el caso en que $x_2^2 > x_1^2 > 0$ y $y_2^2 = y_1^2$.

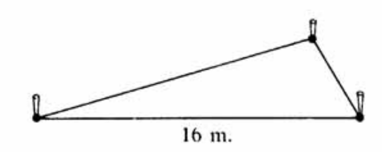
Problemas de aplicación 4—4

1. Supóngase que una escalera de longitud 1 m se apoya sobre una pared vertical y que tiene una marca sobre un peldaño que está a 4 m del extremo superior de la escalera. Demuestre que si el pie de la escalera se desliza, alejándose de la pared sobre una superficie horizontal, de modo que el extremo superior se desliza hacia abajo en contacto con la pared, entonces la marca sobre el peldaño describe una trayectoria elíptica.



(*Sugerencia*: Emplee un sistema de coordenadas como el que se muestra en la figura).

2. La base de un auditorio es de forma elíptica y tiene 20 m de longitud y 16 m de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha claramente cerca del otro foco. ¿A que distancia está un foco del otro?
3. La Tierra se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, y el Sol está sobre uno de los focos de esta elipse. Si la mínima distancia que separa a la tierra del Sol es de 147 000 000 kilómetros, y su mayor separación es de 150 000 000 kilómetros aproximadamente, ¿a qué distancia está el Sol del otro foco de la elipse? (*Sugerencia*: La menor y la mayor separación ocurren cuando la Tierra está sobre el eje mayor de la elipse.)
4. Se traza el contorno de una hortaliza de forma elíptica colocando dos estacas en el suelo con una separación de 16 m y colocando un lazo de longitud total de 36 m alrededor de ellas; se traza el contorno empleando una tercera estaca que al girarla alrededor de las dos fijas mantiene al lazo en tensión. ¿De qué longitud y de qué ancho será la hortaliza?



4—5 Hipérbola

Vimos en la sección 4—4 que una elipse es el lugar geométrico de los puntos que quedan determinados por la *suma* de dos distancias. En esta sección estudiaremos el lugar geométrico determinado por la *diferencia* de dos distancias; una *hipérbola*. Para dos puntos dados $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ del plano, el conjunto $\mathcal{H}$ de los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a los puntos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de $\mathbf{U}$ es una constante dada, menor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, es una **hipérbola**. (Véase la Figura 4—15). Tal como en el caso de la elipse, los términos **focos, ejes principales, vértices** y **centro** de una hipérbola se refiere a los puntos fijos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, a la

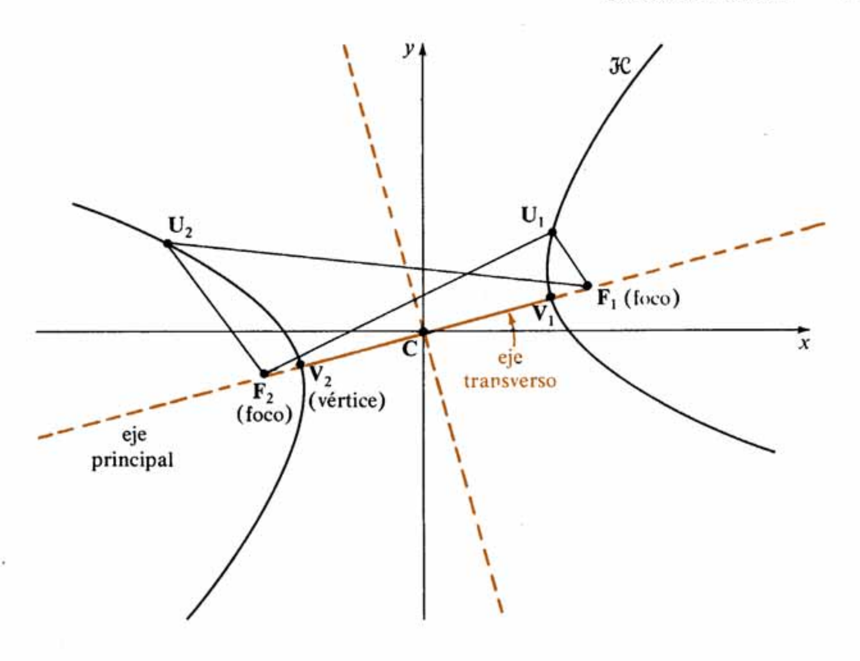
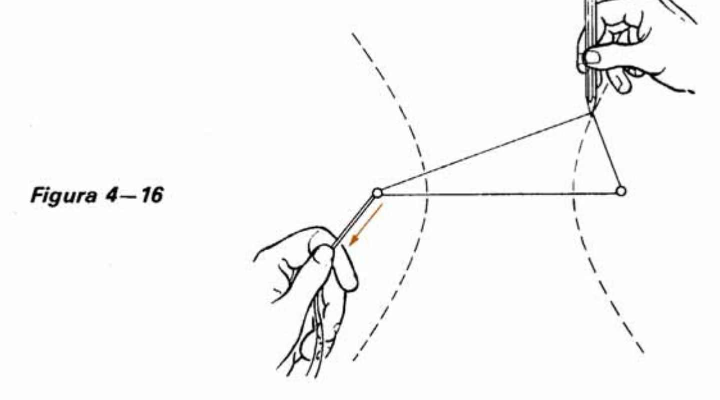


Figura 4–15

recta que pasa por ellos, a los puntos V_1 y V_2 de intersección de ℋ con el eje principal, y al punto medio **C** del segmento $\overline{F_1F_2}$, respectivamente. El segmento $\overline{V_1V_2}$ recibe el nombre de **eje transversal** de la hipérbola. Obsérvese que una hipérbola consta de dos ramas separadas.

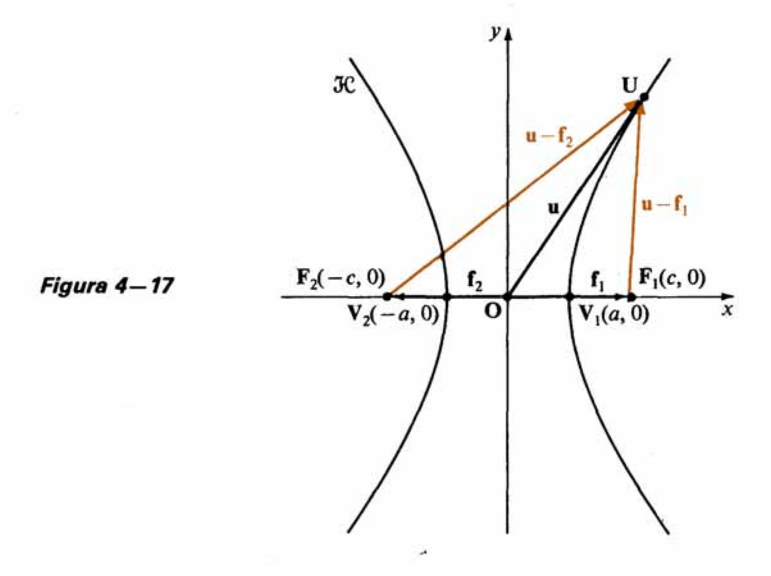
Hay varios métodos para construir una hipérbola. Uno de estos métodos, que es semejante al que se emplea para construir elipses y que se discutió en la Sección 4–4, pero un poco más difícil de llevar a cabo, es el siguiente: Atese un lápiz cerca del punto medio de un cordel, y pásese el cordel por debajo de dos tachuelas sujetas a un pedazo de cartón. Empleando el lápiz para mantener al cordel en tensión tómense los dos extremos en la mano y tírese del cordel como se muestra en la figura 4–16. El lápiz marcará una rama de la hipérbola. la otra rama se obtiene intercambiando los papeles de las tachuelas.

Figura 4–16



Considérese ahora la hipérbola $\mathcal{H}$ (Figura 4–17) cuyo centro es el origen, cuyos focos son $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y para la cual el valor absoluto de la

Figura 4—17



diferencia de distancias de cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de $\mathcal{H}$ a $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ es igual a la constante positiva $2a$, $a < c$. Entonces por definición de ***hipérbola***, el punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{H}$ si y sólo si

$$\left| \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_1\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_2\| \right| = 2a,$$

o bien

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}_1\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_2\| = \pm 2a.$$

Puesto que $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{f}_1 = (c, 0)$, y $\mathbf{f}_2 = (-c, 0)$, esta última ecuación se puede escribir en la forma

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{[x - (-c)]^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Repitiendo un cálculo similar al que aparece en las páginas 139 y 140 se puede demostrar que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

donde

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0 \quad \text{y} \quad b > 0.$$

Tal como en el caso correspondiente a la elipse (página 140) los pasos son reversibles y entonces un punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{H}$ si y sólo si sus. coordenadas satisfacen la Ecuación (1).

Análogamente, una hipérbola con centro en el origen, focos en $\mathbf{F}_1(0, c)$ y $\mathbf{F}_2(0, -c)$, y para la cual el valor absoluto de la diferencia de distancias es igual a $2a$, $0 < a < c$, tiene una ecuación cartesiana de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

El valor de la constante a en las Ecuaciones (1) y (2) puede ser mayor, igual o menor que el valor de b.

Una hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es de la forma (1) o (2) es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados. Entonces si $\mathbf{S}(x, y)$ es un punto de $\mathcal{H}$, también lo son $\mathbf{S}'(x, -y)$, $\mathbf{S}''(-x, y)$, y $\mathbf{S}'''(-x, -y)$.

Si se sustituye a y por 0 en la Ecuación (1) se obtiene $\frac{x^2}{a^2} = 1$, o sea $x = \pm a$. Por consiguiente a y $-a$ son las intersecciones de una hipérbola de la forma (1) con el eje x. Si se sustituye a x por 0 en la Ecuación (1) se obtiene $\frac{y^2}{b^2} = -1$. Puesto que $\frac{y^2}{b^2}$ es siempre no negativo, la hipérbola no corta al eje y.

Análogamente se puede demostrar que una hipérbola cuya ecuación es de la forma (2) corta al eje y en los puntos a y $-a$ y que no corta al eje x.

Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

si se despeja a y^2 en función de x se obtiene

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

de donde

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Las gráficas de estas ecuaciones son dos rectas que se cortan en el origen y cuyas pendientes son $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$, respectivamente.

Si se despeja en la Ecuación (1) de la página 146 a y^2 como función de x se obtiene

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2,$$

de donde

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} \qquad \text{o} \qquad y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2},$$

que es a su vez equivalente a

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

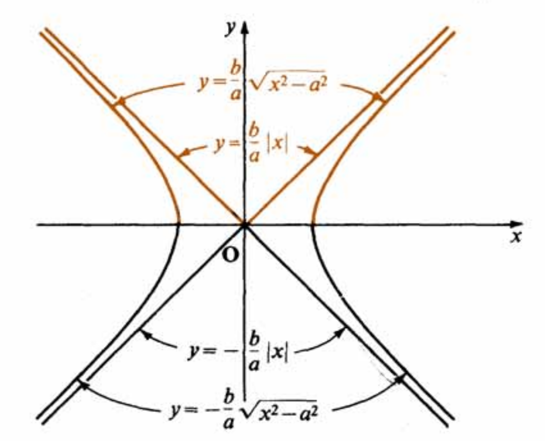


Figura 4—18

Ahora compárense los valores correspondientes de y para las rectas y la hipérbola. Como se ve en la Figura 4-18

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}|x|$$

para todos los reales para los cuales están definidos ambos miembros de la desigualdad. Sin embargo si se permite que $|x|$ crezca sin cota, entonces el valor de $\sqrt{x^2 - a^2}$ se acerca cada vez más al valor de $|x|$, y el valor de $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ se acerca cada vez más a $\frac{b}{a}|x|$. De hecho se tiene

$$\frac{b}{a}|x| - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(|x| - \sqrt{x^2 - a^2})\left(\frac{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}}\right)$$

$$= \frac{b(x^2 - x^2 + a^2)}{a(|x| + \sqrt{x^2 - a^2})}$$

$$= \frac{ab}{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

que puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando $|x|$ suficientemente grande.

Como se muestra en la Figura 4–18 se tiene también

$$-\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} > -\frac{b}{a}|x|$$

para todos los reales para los cuales están definidos ambos miembros de la desigualdad. Si $|x|$ aumenta sin cota entonces el valor de $-\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ se acerca más y más al valor de $-\frac{b}{a}|x|$.

Por lo tanto, a medida que $|x|$ crece sin cota, el valor de $|y|$ para la hipérbola se acerca más y más a $\frac{b}{a}|x|$, las ramas de la hipérbola se aproximan más y más a las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{b}{a}x$, y

$y = -\dfrac{b}{a}x$, respectivamente. Estas rectas reciben el nombre de **asíntotas** de la hipérbola.

Con más generalidad, siempre que una curva se acerca de esta forma a una o más rectas se dice que las rectas son **asíntotas** de la curva. Se discutirá el concepto de asíntotas con más detalle en el Capítulo 6.

Las intersecciones con los ejes y las asíntotas de una hipérbola, así como las consideraciones de simetría, son útiles al trazar esquemas de una hipérbola. Como se muestra en la Figura 4–19 la longitud del eje transversal de una hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es $2a$.

El segmento de recta que pasa por el centro de una hipérbola, que es perpendicular al eje principal, y cuyos extremos están a una distancia b, donde $b^2 = c^2 - a^2$, del centro se llama **eje conjugado** de la hipérbola. Por lo tanto la longitud del eje conjugado ($\overline{W_1W_2}$ en la Figura 4–19) es $2b$.

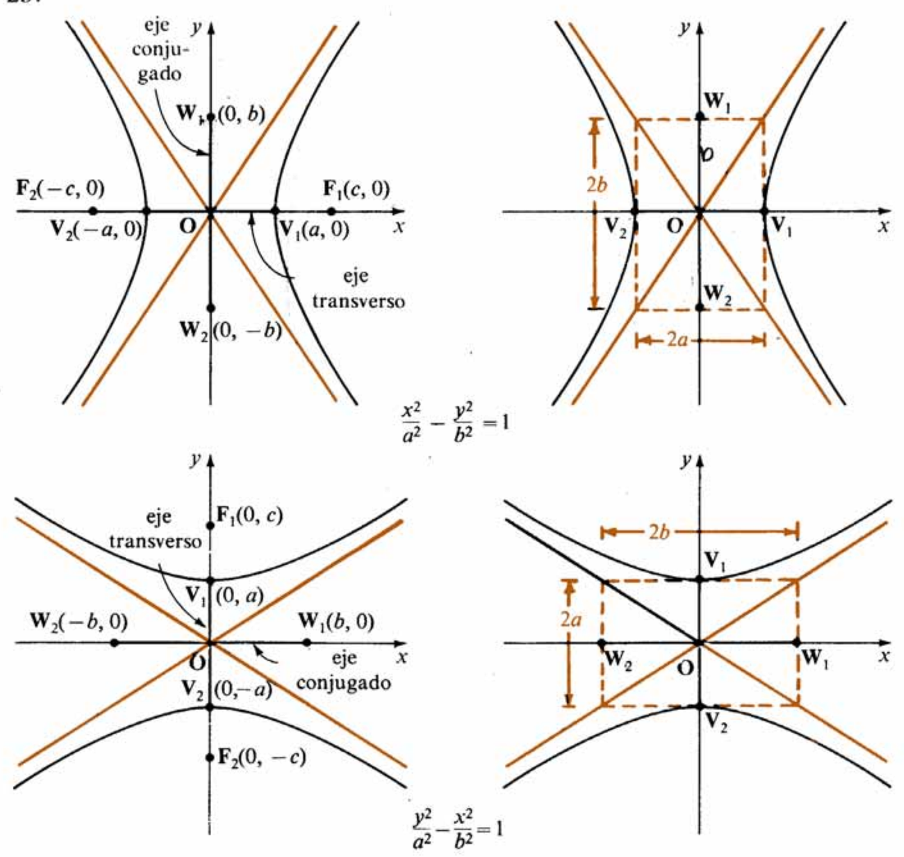
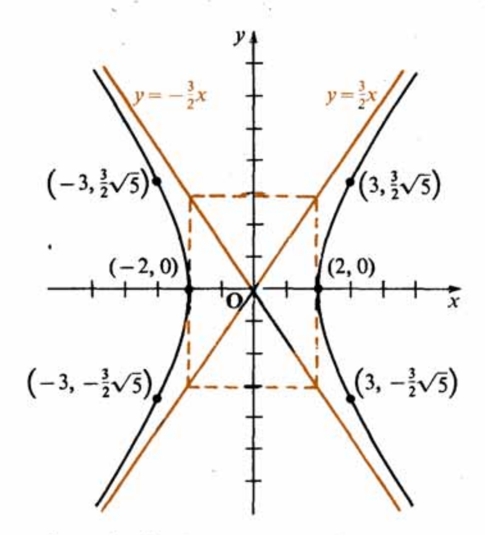


Figura 4—19

Una manera rápida de trazar un esquema de una hipérbola de uno de los tipos que se muestran en la Figura 4–19 es construir un rectángulo con centro en el origen y cuyos lados tienen longitudes $2a$ y $2b$, en el cual los lados de longitud $2a$ son paralelos al eje principal de la hipérbola. Las diagonales del rectángulo son entonces segmentos de las asíntotas de la hipérbola, y los puntos medios de los lados de longitud $2b$ son los vértices de la hipérbola.

Ejemplo 1 Trace un esquema de la gráfica de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ empleando las asíntotas, las intersecciones con los ejes y argumentos de simetría.

Solución: Obsérvese primero que la gráfica es una hipérbola



con eje principal sobre el eje x, y que $a = 2$ y $b = 3$. Entonces las asíntotas son las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.

Si se sustituye a y por 0 en la ecuación dada, se ve que las intersecciones con el eje x son 2 y –2. Esta hipérbola no tiene intersecciones con el eje y.

Si se sustituye a x por 3 o –3 se obtiene que $y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Por lo tanto los puntos $(3, \frac{3}{2}\sqrt{5})$, $(3, -\frac{3}{2}\sqrt{5})$, $(-3, \frac{3}{2}\sqrt{5})$, y $(-3, -\frac{3}{2}\sqrt{5})$ están sobre la gráfica. Empleando estos hechos se obtiene la gráfica que se muestra.

Ejercicios 4–5

En los Ejercicios 1–8, obtenga la ecuación de la hipérbola cuyos focos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y cuyos vértices $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ se dan. Trace una gráfica de la ecuación.

1. $\mathbf{F}_1(5, 0)$, $\mathbf{F}_2(-5, 0)$; $\mathbf{V}_1(3, 0)$, $\mathbf{V}_2(-3, 0)$
2. $\mathbf{F}_1(5, 0)$, $\mathbf{F}_2(-5, 0)$; $\mathbf{V}_1(4, 0)$, $\mathbf{V}_2(-4, 0)$

3. $F_1(\sqrt{13}, 0)$, $F_2(-\sqrt{13}, 0)$; $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$
4. $F_1(\sqrt{5}, 0)$, $F_2(-\sqrt{5}, 0)$; $V_1(\sqrt{3}, 0)$, $V_2(-\sqrt{3}, 0)$
5. $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$; $V_1(0, 4)$, $V_2(0, -4)$
6. $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$; $V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$
7. $F_1(0, \sqrt{7})$, $F_2(0, -\sqrt{7})$; $V_1(0, \sqrt{3})$, $V_2(0, -\sqrt{3})$
8. $F_1(0, \sqrt{21})$, $F_2(0, -\sqrt{21})$; $V_1(0, \sqrt{5})$, $V_2(0, -\sqrt{5})$

En los Ejercicios 9—12, obtenga la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, para la cual se dan las longitudes de los ejes conjugado y transversal, y cuyos ejes principales se especifica.

Ejemplo. $2a = 8$, $2b = 10$; eje x

Solución: Se tiene

$$2a = 8, a = 4;$$

y

$$2b = 10, b = 5.$$

Por lo tanto una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

9. $2a = 10$, $2b = 8$; eje x
10. $2a = 14$, $2b = 6$; eje x
11. $2a = 26$, $2b = 10$; eje y
12. $2a = 2\sqrt{7}$, $2b = 4$; eje y

En los Ejercicios 13—20, calcule las coordenadas de los vértices y los focos de la hipérbola cuya ecuación se da. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas y trace un esquema de la hipérbola.

13. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
14. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$
15. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$
16. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$
17. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$
18. $\frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1$
19. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
20. $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1$

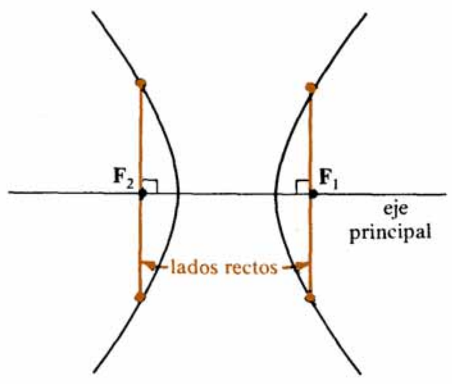
En los Ejercicios 21—26, obtenga una ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en el origen y que satisface las condiciones dadas.

21. Focos en $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$; pasa por $S(14, 24)$.
22. Focos en $F_1(0, 4)$ y $F_2(0, -4)$; una de sus asíntotas tiene la ecuación $3y = x$.
* **23.** Eje principal sobre el eje x; pasa por los puntos $S(2, 1)$ y $T(4, 3)$.
* **24.** Eje principal sobre el eje x; pasa por los puntos $S(3, 1)$ y $T(9, 5)$.

*** 25.** Eje principal sobre el eje y; un extremo del eje conjugado es $\mathbf{W}_1(3, 0)$; un vértice está sobre el punto medio del segmento que une al centro con un foco.

*** 26.** Eje principal sobre el eje y; un foco en $\mathbf{F}_1(0, 4)$; $c = 3a$.

La longitud del segmento que es perpendicular al eje principal de una hipérbola, que contiene a los focos de dicha hipérbola y cuyos extremos están sobre ella se llama el *ancho focal* de la hipérbola. El segmento se llama *lado recto* de la hipérbola.



*** 27.** Obtenga una ecuación cartesiana de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyo centro está en el origen, y ancho focal es 36 y uno de cuyos focos está en $\mathbf{F}_2(-12, 0)$.

*** 28.** Demuestre que la hipérbola $\mathcal{H}$ y la elipse $\mathcal{E}$ cuyas ecuaciones son $3x^2 - y^2 = 12$ y $9x^2 + 25y^2 = 225$ respectivamente tienen los mismos focos.

*** 29.** Demuestre que el ancho focal de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $\dfrac{2b^2}{a}$

*** 30.** Demuestre que el ancho focal de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

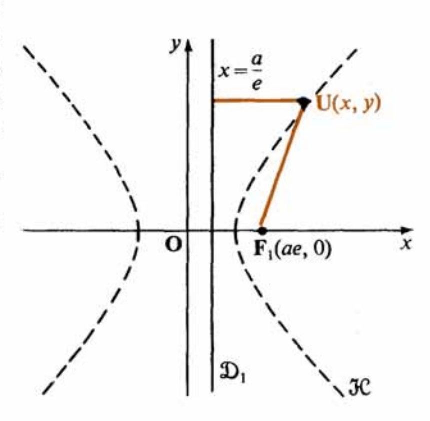
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $2b\sqrt{e^2 - 1}$, donde $e = \dfrac{c}{a}$.

*** 31.** Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los puntos **U** tales que el cociente de la distancia **U** que los separa del punto $\mathbf{F}_1(ae, 0)$ (véase en Ejercicios 30) y la distancia **U** que los separa de la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \dfrac{a}{e}$ es igual a e. Demuestre que $\mathcal{H}$ es la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siempre y cuando $e > 1$ y $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.



*** 32.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la hipérbola cuyos focos son $\mathbf{F}_1(0, c)$ y $\mathbf{F}_2(0, -c)$; y cuya diferencia de distancias es $2a$, $0 < a < c$, es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = c^2 - a^2 > 0$.

*** 33.** Demuestre que si $x_2^2 > x_1^2 > 0$ y $y_2^2 > y_1^2 > 0$, entonces

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación de una hipérbola que pasa por $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

*** 34.** Trace la gráfica de la ecuación que se menciona en el Ejercicio 33 en el caso $(x_1, y_1) = (0, 0)$, pero con $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$.

En los Ejercicios 35—38, emplee la definición de hipérbola para obtener una ecuación cartesiana de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y cuya diferencia de distancias tiene el valor absoluto dado.

*** 35.** $\mathbf{F}_1(3, 1)$, $\mathbf{F}_2(-3, 1)$; $2a = 2$

*** 36.** $\mathbf{F}_1(4, 4)$, $\mathbf{F}_2(4, -4)$; $2a = 6$

*** 37.** $\mathbf{F}_1(4, 1)$, $\mathbf{F}_2(-4, 1)$; $2a = 4$

*** 38.** $\mathbf{F}_1(2, 0)$, $\mathbf{F}_2(2, 10)$; $2a = 8$

Otra definición de las secciones cónicas

4–6 Propiedades del foco y la directríz

Al principio del capítulo se definió la parábola en términos de las distancias que separan a cada punto de la curva de un punto fijo (el foco) y de una recta dada (la directriz). Por otra parte se definieron la elipse y la hipérbola en términos de la suma y diferencia, respectivamente, de las distancias que separan cada punto de la curva de dos puntos fijos (los focos). Es posible también definir la elipse y la hipérbola en términos de distancias a un punto y una recta fijos, tal como se hizo en el caso de la parábola.

Considérese la elipse con centro en el origen, un foco en $\mathbf{F}_1(c, 0)$, y un vértice en $\mathbf{V}_1(a, 0)$, $0 < c < a$, como se muestra en la Figura 4–20. La distancia $d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)$ de cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse al foco $\mathbf{F}_1$ está dada por

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

Debido a la Ecuación (4), página 139, las coordenadas de cada punto $\mathbf{U}$ de la elipse debe satisfacer

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

o

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x. \tag{2}$$

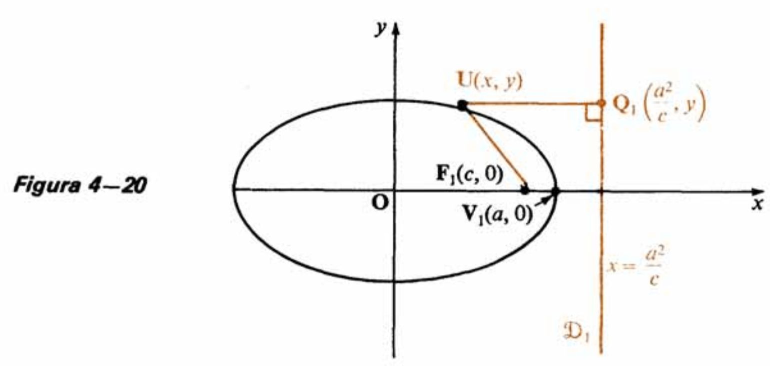


Figura 4—20

Sustituyendo (1) en (2) se tiene

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = a - \frac{c}{a}x,$$

de donde se obtiene

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right). \tag{3}$$

Nótese ahora que $\dfrac{a^2}{c} > a \geq x$, puesto que $a > c > 0$ y $x \leq a$ para cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse. Por lo tanto $\dfrac{a^2}{c} - x > 0$, y según esto el factor $\dfrac{a^2}{c} - x$ que aparece en el segundo miembro de la Ecuación (3) es precisamente la distancia $d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)$ que separa al punto $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse de la recta $\mathfrak{D}_1$ cuya ecuación es $x = \dfrac{a^2}{c}$. Es decir la ecuación (3) se puede escribir en la forma

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = \frac{c}{a} d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1). \tag{4}$$

El cociente $\dfrac{c}{a}$ recibe el nombre de **excentricidad** de la elipse, y se acostumbra denotarla mediante el símbolo e. Obsérvese que

$$0 < e < 1$$

puesto que $0 < c < a$. Sustituyendo a e por $\dfrac{c}{a}$ en la Ecuación (4)

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} = e. \tag{5}$$

Puesto que este desarrollo es reversible, paso a paso, se sigue que se puede definir una elipse como el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el *cociente* de las distancias que separan a cada punto sobre el lugar geométrico de un punto dado (el foco) y de una recta dada (la directriz) es una constante e, con $0 < e < 1$.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ cuyo centro es $\mathbf{O}(0, 0)$, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(3, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{2}{3}$. Obtenga también una ecuación de la directriz $\mathfrak{D}_1$. asociada a este foco.

Solución: De la información dada $c = 3$. Entonces como $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, se tiene

$$\frac{3}{a} = \frac{2}{3}, \quad \text{o bien} \quad a = \frac{9}{2}.$$

Ahora como para una elipse los valores de a, b y c están relacionados por

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

se tiene

$$b^2 = a^2 - c^2 = \tfrac{81}{4} - 9 = \tfrac{45}{4}.$$

Por lo tanto como $a^2 = (\frac{9}{2})^2 = \frac{81}{4}$, una ecuación de $\mathcal{E}$ es

$$\frac{x^2}{\frac{81}{4}} + \frac{y^2}{\frac{45}{4}} = 1,$$

o bien

$$\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1.$$

Sustituyendo los valores de a^2 y c en la ecuación

$$x = \frac{a^2}{c},$$

se obtiene

$$x = \frac{\frac{81}{4}}{3},$$

o sea

$$x = \tfrac{27}{4},$$

que es la ecuación de la directriz $\mathcal{D}_1$.

Una elipse con centro en $\mathbf{O}(0, 0)$, un foco en $\mathbf{F}_1(c, 0)$, y un vértice en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ tiene también un foco en $\mathbf{F}_2(-c, 0)$. Empleando este foco como se indica en la Figura 4–21, se puede demostrar (véase el Ejercicio 32, página

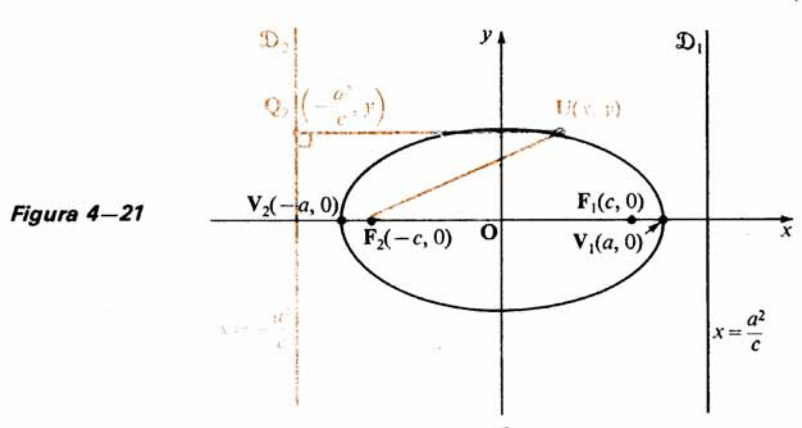


Figura 4–21

160) que la recta $\mathcal{D}_2$ cuya ecuación es $x = -\dfrac{a^2}{c}$ es también una directriz de la elipse, es decir se puede demostrar que para cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ sobre la elipse se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e.$$

Esto indica que toda elipse tiene dos focos y dos directrices, estando cada directriz asociada con un foco.

Empleando la Figura 4–22 se puede demostrar (Ejercicio 33, página 160) por un método análogo al empleado anteriormente en el caso de la elipse, que para una hipérbola con centro en el origen, foco en $\mathbf{F}_1(c, 0)$, y un vértice en $\mathbf{V}_1(a, 0)$, $0 < a < c$, el cociente de las distancias que separan a un punto

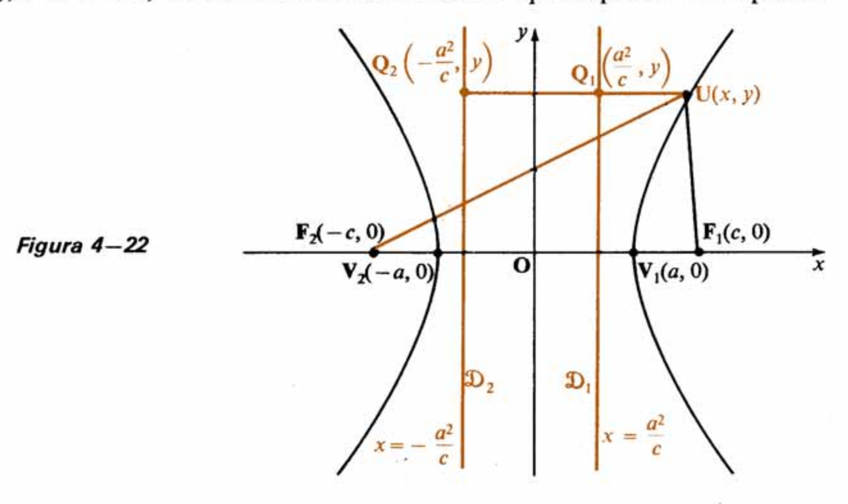


Figura 4–22

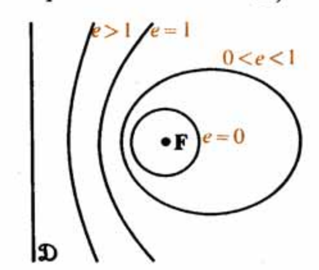
$\mathbf{U}(x, y)$ de la hipérbola del foco $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y de la recta $\mathfrak{D}_1$ cuya ecuación es $x = \dfrac{a^2}{c}$ está nuevamente dado por la Ecuación (5), página 154. Si se sustituye a la recta $\mathfrak{D}_1$ por la recta $\mathfrak{D}_2$ cuya ecuación es $x = -\dfrac{a^2}{c}$, y al foco $\mathbf{F}_1(c, 0)$ por el foco $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, entonces la ecuación es todavía válida (Ejercicios 34, página 160). Es decir se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} = \frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e.$$

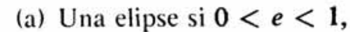
Claro está que en el caso de la hipérbola, como $c > a > 0$ y $e = \dfrac{c}{a}$, se tiene $e > 1$.

En resumen se han establecido los hechos siguientes, que se ilustran en el siguiente diagrama:

Para una recta dada $\mathfrak{D}$ y un punto fijo $\mathbf{F}$ que no esté sobre $\mathfrak{D}$, el lugar geométrico de los puntos $\mathbf{U}$ del plano tales que el cociente de las distacias de $\mathbf{U}$ a $\mathbf{F}$ y a $\mathfrak{D}$ es una constante, e, es



(a) Una elipse si $0 < e < 1$,



(b) una parábola si $e = 1$ y

(c) una hipérbola si $e > 1$.

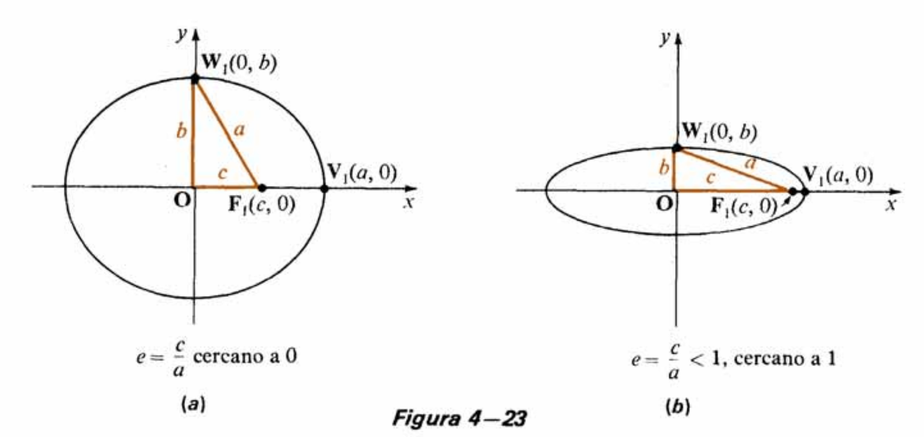


Figura 4—23

En todos los casos la constante e se llama *excentricidad* de la cónica.

Como se muestra en la Figura 4–23 la forma de una elipse está relacionada con su excentricidad. Si la excentricidad, $e = \dfrac{c}{a}$, es cercana a 0, entonces c, o sea $d(\mathbf{O}, \mathbf{F}_1)$, es muy pequeño comparado con a, y b es casi igual a a. Por lo tanto la elipse es casi circular (Figura 4–23(a)). De hecho se dice que una circunferencia tiene excentricidad cero. Si la excentricidad de una elipse es cercana a 1, entonces c es casi igual a a, y b es muy pequeño. En este caso el ancho focal (página 142) es pequeño y la elipse es alargada (Figura 4—23 (b)). Todas las elipses que tienen la misma excentricidad son semejantes (Ejercicio 28, página 159); es decir tienen la misma forma y una de ellas es simplemente una reducción o ampliación de cualquier otra.

La forma de una hipérbola también está relacionada con su excentricidad. Como se ve en la Figura 4–24 (a) si la excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$, es ligeramente mayor que 1 entonces c es casi igual a a, y b es muy pequeño. Por consiguiente el ancho focal es pequeño y la hipérbola es "delgada". Si la excentricidad es grande (Figura 4–24 (b)), entonces (respecto a c) a es pequeño, y b es casi igual a c. Por consiguiente, el ancho focal es grande y la hipérbola es "ancha". Todas las hipérbolas que tienen la misma excentricidad son semejantes (Ejercicio 29, página 159).

Ejercicios 4—6

1. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(4, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-4, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{4}{5}$.

2. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ con vértices en $\mathbf{V}_1(5, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-5, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{5}$.

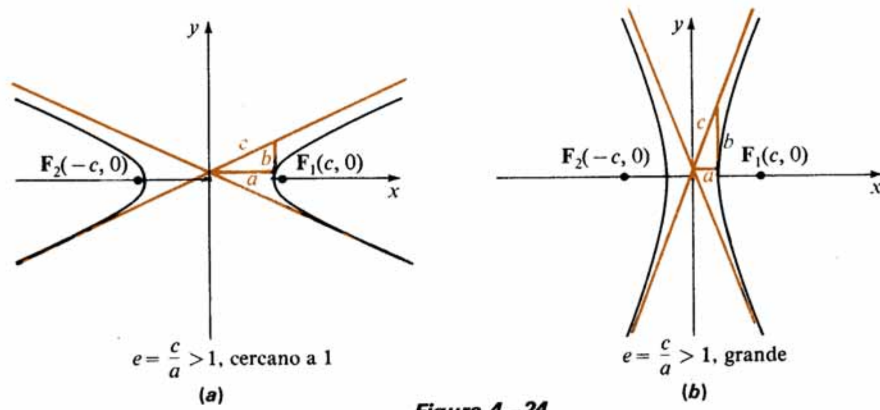


Figura 4—24

3. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ con centro en el origen, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(3, 0)$, y para la cual la directriz $\mathcal{D}_1$ asociada a este foco tiene la ecuación $x = \frac{16}{3}$.

4. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ con centro en el origen, para la cual uno de los extremos del eje mayor está en $\mathbf{V}_1(0, 13)$, y una de cuyas directrices es la recta $\mathcal{D}_1$ que tiene la ecuación $y = \frac{169}{12}$.

5. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$, con focos $\mathbf{F}_1(5, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-5, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{1}{3}$.

6. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos vértices son $\mathbf{V}_1(4, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-4, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{1}{3}$.

7. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(3, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-3, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{2}$.

8. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(0, 2)$ y $\mathbf{F}_2(0, -2)$, y cuya excentricidad es $e = 3$.

9. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyo centro está en el origen, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(4, 0)$, y para la cual la directriz asociada es la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \frac{3}{4}$.

10. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyo centro está en el origen, uno de cuyos vértices es $\mathbf{V}_1(4, 0)$, y tal que la directriz asociada $\mathcal{D}_1$ es la recta cuya ecuación es $x = \frac{16}{7}$.

11. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ una de cuyas directrices es la recta cuya ecuación es $x = \frac{1}{2}$ y cuyas asíntotas son las rectas cuyas ecuaciones son $y = \pm 3x$.

12. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ una de cuyas directrices es la recta cuya ecuación es $y = 2$ y cuyas asíntotas son las rectas dadas por $y = \pm x$.

13. Si $a = b$ en la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y con focos sobre los ejes coordenados, entonces la curva es una **hipérbola equilátera.** Diga cuál es la excentricidad de una hipérbola equilátera.

14. Demuestre que las asíntotas de una hipérbola equilátera (Véase el Ejercicio 13) son perpendiculares.

15. Calcule la excentricidad de una elipse si la recta que contiene a un extremo del eje menor y a un foco es perpendicular a la recta que contiene al mismo extremo del eje menor y al otro foco.

16. Demuestre que si p es la distancia que separa a un foco de la directriz correspondiente entonces $p = \frac{b^2}{c}$.

*** 17.** Demuestre que si p es la distancia que separa a un foco de la correspondiente directriz de una elipse, entonces la longitud del eje mayor es $\frac{2ep}{(1 - e^2)}$.

*** 18.** Demuestre que si p es la distancia que separa a un foco a la correspondiente directriz de una hipérbola, entonces la longitud del eje transversal es $\frac{2ep}{(e^2 - 1)}$.

*** 19.** Las asíntotas de una hipérbola cuyo eje transversal es horizontal tienen pendientes $\pm m$, respectivamente, con $m > 0$. Exprese la excentricidad de la hipérbola en términos de m.

*** 20.** Demuestre que para una elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$$

las longitudes de los segmentos que unen a los focos con un punto $\mathbf{U}(x, y)$ de $\mathcal{E}$ son $a \pm ex$.

*** 21.** Demuestre que para la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

las longitudes de los segmentos que unen a un punto $\mathbf{U}(x, y)$ de $\mathcal{H}$ con los focos son $|ex \pm a|$.

*** 22.** Obtenga una ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(6, 1)$ y $\mathbf{F}_2(-4, 1)$, cuya excentricidad es $e = \frac{3}{2}$.

*** 23.** Obtenga una ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos vértices son $\mathbf{V}_1(6, 1)$ y $\mathbf{V}_2(-4, 1)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{2}$.

*** 24.** Obtenga una ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ con centro en $\mathbf{C}(2, 3)$, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(6, 3)$, y para el cual la directriz asociada es la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = 3$.

*** 25.** Obtenga una ecuación de la elipse con centro en $\mathbf{C}(2, 3)$, uno de cuyos focos está en $\mathbf{F}_1(6, 3)$, y para el cual la directriz asociada es la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \frac{33}{4}$.

*** 26.** Diga cuales son las ecuaciones de las directrices de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$x^2 - y^2 + 4x + 4y - 48 = 0.$$

*** 27.** Diga cuales son las ecuaciones de las directrices de la elipse $\mathcal{E}$ cuya. ecuación es

$$x^2 + 5y^2 + 6x - 40y - 167 = 0.$$

*** 28.** Demuestre que todas las elipses con la misma excentricidad son semejantes. (*Sugerencia*: Demuestre que si las elipses $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ y $\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ tienen la misma excentricidad y $a_2 = ka_1$, entonces $b_2 = kb_1$. Ahora demuestre que si $\mathbf{U}_1(x, y)$ está sobre la primera elipse entonces $\mathbf{U}_2(kx, ky)$ está sobre la segunda elipse.)

*** 29.** Demuestre que todas las hipérbolas con la misma excentricidad son semejantes. (*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 28.)

*** 30.** Demuestre que todas las parábolas son semejantes. (*Sugerencia*: Para las parábolas $y^2 = 4p_1x$ y $y^2 = 4p_2x$, demuestre que si $\mathbf{U}_1(x, y)$ está sobre la primera parábola entonces $\mathbf{U}_2\left(\frac{p_2}{p_1}x, \frac{p_2}{p_1}y\right)$ está sobre la segunda).

*** 31.** Demuestre que todas las circunferencias son semejantes. (*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 30).

*** 32.** Demuestre que para todos los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse con focos en $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y con vértices en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-a, 0)$, se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e,$$

donde $e = \frac{c}{a}$ y $\mathfrak{D}_2$ es la recta cuya ecuación es $x = -\frac{a^2}{c}$.

(*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 20.)

*** 33.** Demuestre que para todos los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ de una hipérbola con focos en $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y con vértices en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-a, 0)$,. se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} = e,$$

donde $e = \frac{c}{a}$ y $\mathfrak{D}_1$ es la recta cuya ecuación es $x = \frac{a^2}{c}$.

(*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 21.)

*** 34.** Demuestre que para todos los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ de la hipérbola con focos en $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y vértices en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-a, 0)$, se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e,$$

donde $e = \frac{c}{a}$ y $\mathfrak{D}_2$ es la recta cuya ecuación es $x = -\frac{a^2}{c}$.

Resumen del capítulo

1. Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos. Este conjunto se determina normalmente especificando las condiciones geométricas que deben cumplir los puntos del conjunto.

2. La **ecuación de un lugar geométrico** es una ecuación que queda satisfecha por las coordenadas de cada punto del lugar geométrico, pero que no es satisfecha por ningún otro punto.
3. Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia dada (el radio) de un punto dado (el centro). Una ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ se puede escribir de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

donde el punto $\mathbf{C}(h, k)$ es el centro y r es el radio de $\mathcal{C}$. Si se desarrollan los binomios, esta ecuación se puede escribir en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde D, E y F son constantes.
4. Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que cada punto del conjunto está a la misma distancia de un punto dado $\mathbf{F}$ (el **foco**) y de una recta dada $\mathcal{D}$ que no pasa por $\mathbf{F}$ (la **directriz**). La recta que contiene el foco $\mathbf{F}$ y es perpendicular a la directriz $\mathcal{D}$ recibe el nombre de **eje** de la parábola. Una parábola es simétrica con respecto a su eje.
5. La forma ordinaria de la ecuación de una parábola con vértice en el origen y cuyo eje está sobre el eje x o eje y es

$$y^2 = 4px \quad \text{o bien} \quad x^2 = 4py,$$

respectivamente, donde p es la distancia dirigida del vértice al foco.
6. Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias que separan a un punto del conjunto de dos puntos dados $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (los **focos**) es una constante dada mayor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$. La recta que pasa por los focos es el **eje principal** de la elipse, y el punto medio del segmento que une a los focos es el **centro** de la elipse. Los puntos de intersección de la elipse y el eje principal son los **vértices** de la elipse. El segmento que une a los vértices es el **eje mayor** de la elipse, y el segmento de recta que es perpendicular al eje mayor en su punto medio y cuyos extremos están sobre la elipse es el **eje menor** de la elipse.
7. La forma ordinaria de una ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen y cuyos focos están sobre el eje x o el eje y es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

respectivamente, donde a es la longitud de un semieje mayor y $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (donde c es la distancia del centro a un foco) es la longitud de un semieje menor.
8. Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a cualquier punto del conjunto de dos puntos dados $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (los focos) es una constante dada menor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$. Las definiciones de los términos **eje principal, centro** y **vértices** de una hipérbola son similares a las dadas para elipse (véase página 144). El segmento que une a los vértices es el **eje**

transversal de la hipérbola, y el segmento de longitud $2b$ (véase párrafo 9) que es perpendicular al eje transversal y lo bisecta es el **eje conjugado** de la hipérbola.

9. La forma ordinaria de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x o eje y es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

respectivamente, donde a es la longitud de un semieje transversal y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (donde c es la distancia que separa al centro de un foco) es la longitud de un semieje conjugado. Las rectas cuyas ecuaciones son

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \text{ó} \quad y = \pm \frac{a}{b} x,$$

respectivamente, son las asíntotas de la hipérbola.

10. Las elipses, parábolas e hipérbolas se pueden describir como los lugares geométricos de los puntos tales que el cociente de las distancias que separan a cada punto del lugar geométrico de un punto dado (un foco) y de una recta dada (la directriz asociada al foco) es una constante, a saber, $\frac{c}{a}$ o e. La constante e recibe el nombre de **excentricidad** de la cónica. El lugar geométrico es una elipse, una parábola o una hipérbola según si $0 < e < 1$, $e = 1$, o $e > 1$. Se puede considerar que la excentricidad de una circunferencia es cero. Las elipses y las hipérbolas tienen dos focos y dos directrices; para una elipse o una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x las ecuaciones de las directrices son $x = \frac{a^2}{c}$ y $x = -\frac{a^2}{c}$. Una parábola tiene sólo un foco y sólo una directriz.

11. Si la excentricidad e de una elipse es cercana a 0, entonces la elipse es casi circular; si e es cercana a 1 (pero es menor que 1) entonces la elipse es relativamente alargada y delgada. Si la excentricidad de una hipérbola es cercana a 1 (pero es mayor que 1) entonces el ancho focal de la hipérbola es relativamente pequeño; si e es grande el ancho focal es grande. Todas las parábolas son semejantes y todas las circunferencias son semejantes. Todas las elipses de la misma excentricidad son semejantes y todas las hipérbolas de la misma excentricidad son semejantes.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Obtenga la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que son equidistantes de $S(2, 5)$ y $T(-2, -3)$.
2. Obtenga la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el segmento de recta que une a cualquier punto del lugar geométrico con $S(1, 5)$ es perpendicular al segmento que une al punto con $T(7, -3)$.

3. Obtenga una ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la pendiente de la recta que pasa por cualquier punto del lugar geométrico y por **S**(4, 5) es la mitad de la pendiente de la recta que pasa por el punto y por **T**(−2, −3).

4. Obtenga la ecuación de una circunferencia de radio 7 y centro en **C**(−1, −3).

5. Calcule las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 12 = 0.$$

6. Obtenga la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos **Q**(0, −2), **S**(7, −3), y **T**(8, 4).

7. Obtenga la ecuación de la circunferencia con centro en **S**(4, −3) y que es tangente a la recta cuya ecuación es $x - y = 0$.

8. Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuyo foco es **F**(−2, 0).

9. Obtenga una ecuación de la parábola con foco en **F**(0, −5) y cuya directriz es la recta $\mathfrak{D}$ cuya ecuación es $y = 3$.

10. Calcule las coordenadas del foco, y obtenga una ecuación de la directriz de la parábola con vértice en el origen y que pasa por los puntos **S**(−3, −4) y **T**(3, −4).

11. Obtenga una ecuación de la parábola con foco en **F**(2, 3) y cuya ecuación de la directriz $\mathfrak{D}$ es $x = -6$.

12. Obtenga una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos **Q**(1, 0), **S**(0, −7), y **T**(−4, 5).

13. Obtenga una ecuación de la elipse con centro en el origen, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(5, 0)$, y uno de cuyos vértices es $\mathbf{V}_1(13, 0)$.

14. Obtenga una ecuación de la elipse con centro en el origen, con eje principal sobre el eje y, $a = \sqrt{5}$, y $b = 2$. Calcule cuales son las coordenadas de los focos y determine la excentricidad.

15. Encuentre las coordenadas de los focos y de los vértices de la elipse cuya ecuación es

$$25x^2 + 9y^2 = 225.$$

16. Obtenga una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(13, 0)$, y uno de cuyos vértices es $\mathbf{V}_1(5, 0)$.

17. Obtenga una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, con eje principal sobre el eje y, cuyo eje transversal tiene longitud 6 y el eje conjugado tiene longitud 8.

18. Encuentre las coordenadas de los vértices y los focos de la hipérbola dada por la ecuación es

$$\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{17} = 1.$$

obtenga también las ecuaciones de las asíntotas.

19. Obtenga una ecuación de la elipse con vértices en $\mathbf{V}_1(5, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-5, 0)$ cuya excentricidad es $e = \frac{3}{5}$.

20. Obtenga las ecuaciones de las directrices de la elipse dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

21. Obtenga una ecuación de la elipse con focos en $\mathbf{F}_1(7, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-3, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{4}$.

22. Obtenga una ecuación de la hipérbola con vértices en $\mathbf{V}_1(0, 6)$ y $\mathbf{V}_2(0, -6)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{5}{3}$.

23. Obtenga una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de sus focos es $\mathbf{F}_1(0, 10)$, y para la cual la directriz correspondiente es la recta $\mathcal{D}_1$ dada por la ecuación $y = \frac{8}{5}$.

24. Obtenga una ecuación de la hipérbola que tiene a la recta $x = 1$ como directriz, y a las rectas $y = \pm\frac{2}{3}x$ como asíntotas.

Esferas de Dandelin

Es sorprendente, a pesar de que los antiguos griegos conocían bien muchas propiedades de las secciones cónicas, no fue sino hasta 1822 cuando se conocieron las elegantes configuraciones geométricas siguientes (véase Figura 4, página 166). Estas fueron descubiertas por dos matemáticos belgas, Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796—1874) y Germinal Pierre Dandelin (1794—1847).

Como observación preliminar nótese que para un punto O (Figura 1) que está fuera de la esfera $\mathcal{S}$, las rectas que pasan por O y son tangentes a $\mathcal{S}$ son las *generatrices*

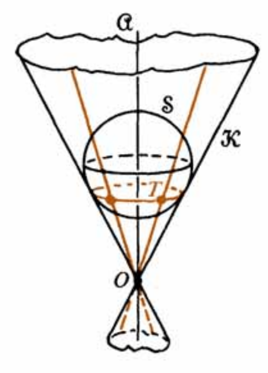
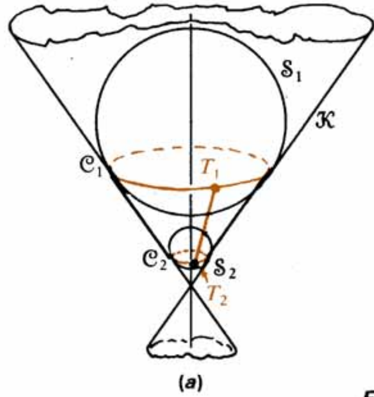


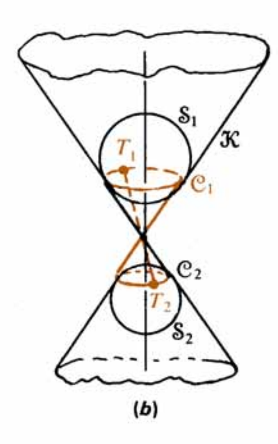
Figura 1

de un cono circular recto $\mathcal{K}$, cuyo vértice es O. Nótese también que los puntos de tangencia T forman una circunferencia $\mathcal{C}$ en un plano perpendicular al eje $\mathcal{A}$ del cono, y que la longitud $d(O, T)$ es la misma para todos los puntos T de $\mathcal{C}$.

Para dos esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ (figura 2) tangentes a $\mathcal{K}$ en las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ una generatriz de $\mathcal{K}$ toca a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en los puntos T_1 y T_2 respectivamente. La parte del cono que está entre dos planos paralelos que lo cortan recibe el nombre de *tronco*. La distancia $d(T_1, T_2)$ es la misma para todas las generatrices de $\mathcal{K}$, ya sea que las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ estén en la misma rama del cono



(*a*)



(*b*)

Figura 2

$\mathcal{K}$, (Figura 2(a) o no (Figura 2(b)). Se denotará a esta distancia constante mediante el símbolo $2a$. Entonces $2a$ es la altura inclinada del tronco del cono $\mathcal{K}$ cuyas bases están acotadas por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Sea ahora $\mathcal{K}$ (Figura 3) un cono circular recto con vértice en V y cuyas generatrices forman un ángulo α, con el eje $\mathcal{A}$ del cono $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{P}$ un plano

$$0 < m^{R}(\alpha) < \frac{\pi}{2},$$

construido en tal forma que corte al eje y corte sólo una rama $\mathcal{N}_1$ del cono, formando una curva cerrada como se muestra a continuación. Sea $\mathcal{E}$ la curva formada por la intersección de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{K}$. Se demostrará por comparación directa que $\mathcal{E}$ es una elipse.

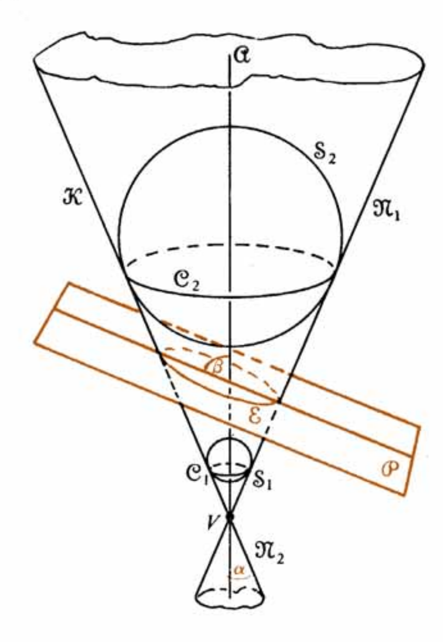


Figura 3

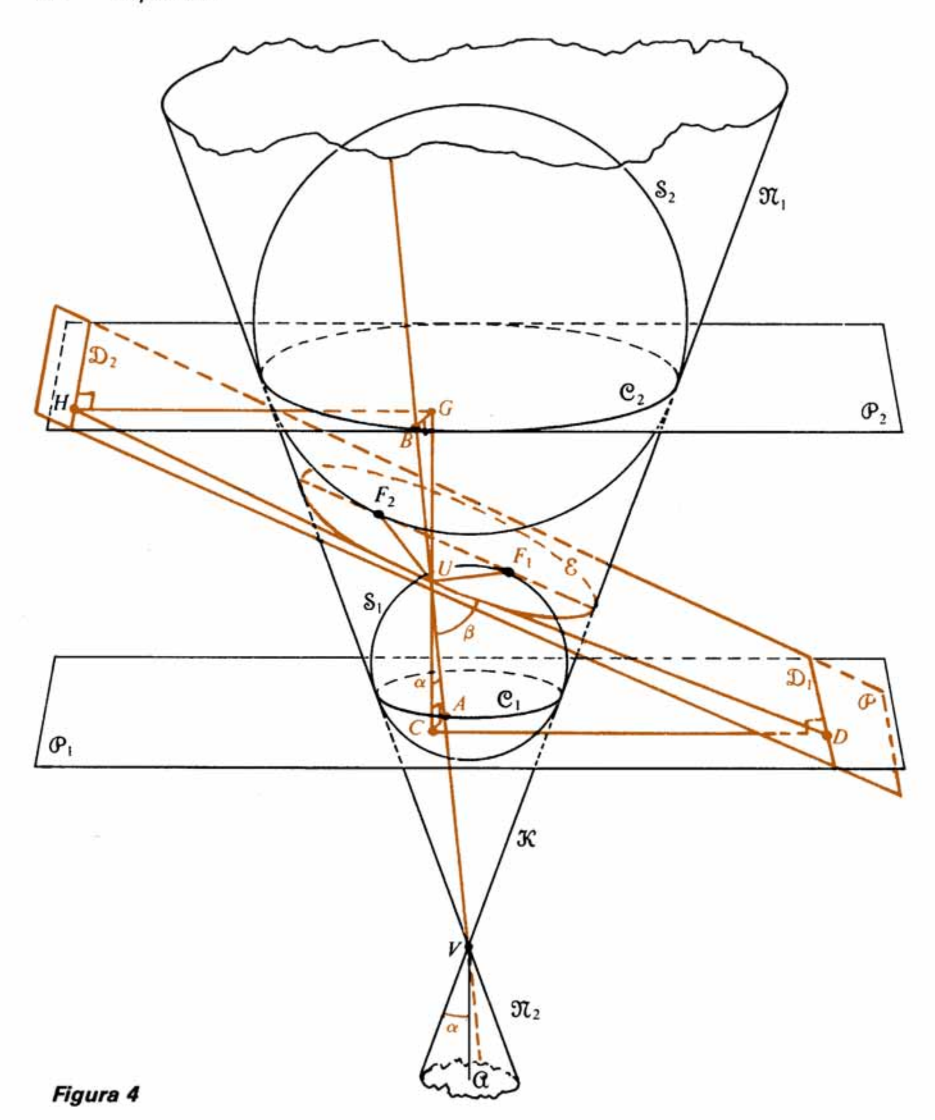


Figura 4

Sea $\mathcal{S}_1$ (figura 3) una esfera muy pequeña cuya circunferencia de contacto $\mathcal{C}_1$ esté del mismo lado de $\mathcal{P}$ que el vértice de $\mathcal{K}$, y sea $\mathcal{S}_2$ una gran esfera cuya circunferencia de contacto $\mathcal{C}_2$ esté en el lado opuesto de $\mathcal{P}$. Imagínese ahora que $\mathcal{S}_1$ se expande y $\mathcal{S}_2$ se contrae hasta que tocan a $\mathcal{P}$ en los puntos F_1 y F_2, respectivamente (Figura 4, página 166). En esta posición final las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ reciben el nombre de *esferas de Dandelin*.

Supóngase que $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son esferas de Dandelin y (como se muestra en la Figura 4) sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ los planos determinados por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ las intersecciones de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, con $\mathcal{P}$ respectivamente.

Para cada punto U de $\mathcal{E}$, sean A y B los puntos en que la generatriz de $\mathcal{K}$ que pasa por U intersecta a $\mathcal{C}_I$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente. Puesto que las rectas UF_1 y UA son tangentes a $\mathcal{S}_1$, y las rectas UF_2 y UB son tangentes a $\mathcal{S}_2$ se tiene

$$d(U, F_1) = d(U, A)$$

o sea

$$d(U, F_2) = d(U, B).$$

Sumando se obtiene

$$d(U, F_1) + d(U, F_2) = d(U, A) + d(U, B) = d(A, B).$$

Esto se puede escribir en la forma

$$d(U, F_1) + d(U, F_2) = 2a, \qquad (1)$$

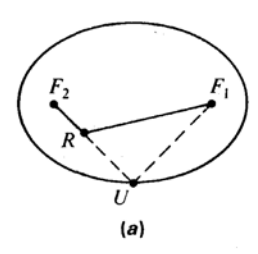
donde $2a = d(A, B)$ es la altura inclinada del tronco del cono $\mathcal{K}$, cuyas bases están acotadas por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Además para cualquier punto R de $\mathcal{P}$ dentro de $\mathcal{E}$ se tiene

$$d(R, F_1) + d(R, F_2) < 2a,$$

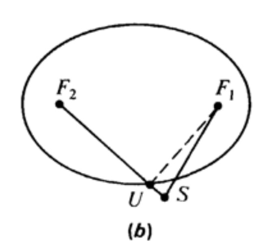
y para cualquier punto S de $\mathcal{P}$ fuera de $\mathcal{E}$ se tiene

$$d(S, F_1) + d(S, F_2) > 2a,$$

como se ve en las Figuras 5(a) y 5(b). Por lo tanto $\mathcal{E}$ es el



(*a*)



(*b*)

Figura 5

lugar geométrico de todos los puntos de $\mathcal{P}$ que satisfacen la Ecuación (1). Entonces por definición (página 137) $\mathcal{E}$ es una elipse con focos F_1 y F_2. La relación expresada por la Ecuación (1) da una interpretación geométrica de la constante $2a$ que aparece en la definición de una elipse; a saber, $2a$ es la altura inclinada del tronco.

Sea el punto C en la Figura 4 la base de la perpendicular al plano $\mathcal{P}_1$ que pasa por U, y sea D la base de la perpendicular a la recta $\mathcal{D}_1$ que pasa por C. Puesto que UC es perpendicular al plano $\mathcal{P}_1$, es paralela al eje . Entonces el ángulo entre UC y UA es igual a α, que es el ángulo entre el eje y el cono. Por lo tanto en el triángulo AUC se tiene

$$\cos \alpha = \frac{d(U, C)}{d(U, A)},$$

o bien, como $d(U, A) = d(U, F_1)$,

$$\cos \alpha = \frac{d(U, C)}{d(U, F_1)}.$$

Sea β el ángulo que forma $\mathcal{P}$ con el eje. Del triángulo UDC se tiene

$$\cos \beta = \frac{d(U, C)}{d(U, D)}$$

o bien como $d(U, D) = d(U, \mathfrak{D}_1)$,

$$\cos\beta = \frac{d(U, C)}{d(U, \mathfrak{D}_1)}.$$

Por lo tanto

$$\frac{d(U, F_1)}{d(U, \mathfrak{D}_1)} = \frac{d(U, F_1)/d(U, C)}{d(U, \mathfrak{D}_1)/d(U, C)}$$

$$= \frac{1/\cos\alpha}{1/\cos\beta}$$

$$= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Según esto se tiene

$$d(U, F_1) = e[d(U, \mathfrak{D}_1)],$$

donde e, definida por

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

tiene el mismo valor para los puntos U da $\mathcal{E}$. Esto quiere decir que $\mathfrak{D}_1$ es la directriz de la elipse $\mathcal{E}$ asociada con el foco F_1, y e es la excentricidad de $\mathcal{E}$. Un argumento similar muestra que $\mathfrak{D}_2$ es la directriz asociada al foco F_2.

Puesto que

$$0 < m^R(\alpha) < m^R(\beta) < \frac{\pi}{2}$$

se tiene

$$1 > \cos\alpha > \cos\beta > 0,$$

y por lo tanto

$$0 < \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1,$$

es decir

$$0 < e < 1.$$

En la Figura 4 de la página 166 considérese que el cono $\mathcal{K}$ permanece fijo pero que el plano $\mathcal{P}$ gira hacia una posición horizontal, de modo que $m^R(\beta)$ se acerque a $\frac{\pi}{2}$ (tomando como eje de rotación a la recta horizontal en $\mathcal{P}$ que intersecta al eje $\mathcal{A}$ del cono). ¿Resulta evidente que a medida que las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ y los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, se ajustan apropiadamente, las directrices $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ se alejan indefinidamente, y que los focos F_1 y F_2 se acercan a un punto común? En la posición límite $\mathcal{P}$ es paralela a $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, y $\mathcal{E}$ se convierte en una circunferencia. La circunferencia no tiene directrices. Puesto que ahora $m^R(\beta) = \frac{\pi}{2}$, y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, para la circunferencia se tiene

$$e = \frac{0}{\cos\alpha} = 0.$$

En la otra dirección considérese que $m^{R}(\beta)$ se acerca a $m^{R}(\alpha)$, tomándose el mismo eje de rotación. Entonces $\mathcal{S}_2$ se aleja cada vez más. En la posición límite $\mathcal{S}_2$ desaparece F_2 y $\mathcal{D}_2$ desaparecen también. Ahora $\mathcal{P}$ es paralelo a la generatriz de $\mathcal{K}$, y la intersección de $\mathcal{P}$ y el cono es una parábola. Puesto que ahora $m^{R}(\beta) = m^{R}(\alpha)$, y $\cos\beta = \cos\alpha$, para la parábola se tiene

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1.$$

A medida que $\mathcal{P}$ gira aún más, con $m^{R}(\alpha) > m^{R}(\beta) > 0$, $\mathcal{P}$ intersecta a la otra rama $\mathcal{N}_2$, del cono $\mathcal{K}$, y un argumento análogo al anterior para el caso de la elipse muestra que la intersección de $\mathcal{P}$ con $\mathcal{K}$ es una hipérbola. Puesto que ahora $\frac{\pi}{2} > m^{R}(\alpha) > m^{R}(\beta) > 0$, y $0 < \cos\alpha < \cos\beta < 1$, para la hipérbola se tiene

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1.$$

Como ejercicio se recomienda trazar y discutir figuras análogas a la Figura 4 para la circunferencia, parábola e hipérbola. Pueden considerarse también figuras correspondientes a varias secciones cónicas degeneradas; en particular para el caso de dos rectas paralelas se puede mantener a $\mathcal{S}_1$ fijo y permitir que el vértice $\mathcal{K}$ se aleje indefinidamente.